

I

$$(1) \text{ 軸 } x=3 \quad \text{頂点 } (3,13) \quad (2) \frac{37}{4} \quad (3) \left(\frac{11+\sqrt{73}}{6}, 0 \right), \left(\frac{11-\sqrt{73}}{6}, 0 \right)$$

$$(4) \cos \theta = \frac{\sqrt{5}}{3}, \tan \theta = \frac{2\sqrt{5}}{5} \quad (5) 43 \text{ 個} \quad (6) 20100 \quad (7) 1716 \text{ 通り}$$

$$(8) 45 \text{ 通り} \quad (9) y' = 8x - 3 \quad (10) \frac{15}{2}$$

II

- (1) 線分 OA の式は $y = \sqrt{3}x$ ($0 \leq x \leq 1$)

P (t, s) とおくと、x 軸と P の距離は s なので、OA と P の距離も s である。

よって、点と直線の距離の公式より

$$s = \frac{|\sqrt{3}t - s|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{3}t - s}{2} \Leftrightarrow s = \frac{\sqrt{3}}{3}t$$

$\therefore$ P は明らかに線分 OA の下側にあるので $s < \sqrt{3}t$

よって、この円の方程式は

$$(x - t)^2 + \left(y - \frac{\sqrt{3}}{3}t\right)^2 = \frac{t^2}{3} \quad \cdots (\text{答})$$

この式に $y = \sqrt{3}x$ を代入して整理すると、

$$4x^2 - 4tx + t^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x - t)^2 = 0$$

よって、 $y = \sqrt{3}x$ との接点の x 座標は $x = \frac{t}{2}$

$0 \leq x \leq 1$ と $t \neq 0$ を考慮すると、 t の範囲は

$$0 < t \leq 2 \quad \cdots (\text{答})$$

- (2) この円の半径は $\frac{t}{\sqrt{3}}$ なので、面積は $\frac{\pi}{3}t^2$ である。

よって、面積の最大値は $t = 2$ のときで、

$$\frac{\pi}{3} \cdot 2^2 = \frac{4}{3}\pi \quad \cdots (\text{答})$$

- (3) 線分 AB の式は $y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{4}{\sqrt{3}}$ ($1 \leq x \leq 4$)

P と AB の距離が s となるので、点と直線の距離の公式より

$$s = \frac{\left| \frac{1}{\sqrt{3}}t + s - \frac{4}{\sqrt{3}} \right|}{\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}t - s + \frac{4}{\sqrt{3}} \right)$$

$\therefore$ P は明らかに線分 AB の下側にあるので $s < -\frac{1}{\sqrt{3}}t + \frac{4}{\sqrt{3}}$

円は線分 OA にも接しているので、 $s = \frac{1}{\sqrt{3}}t$ も成り立っている。

よって 2 式を連立して解くと、

$$\frac{1}{\sqrt{3}}t = -\frac{1}{\sqrt{3}}t + 2 \Leftrightarrow t = 3 - \sqrt{3}$$

このときの中心の座標は

$$(3 - \sqrt{3}, \sqrt{3} - 1) \quad \cdots (\text{答})$$

半径は $\sqrt{3} - 1 \quad \cdots (\text{答})$

III

- (1) 題意の領域は $y \geq \frac{3}{2}x^2, y \leq x$

$$y = \frac{3}{2}x^2, y = x \text{ の交点は } (0,0), \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

$0 \leq x \leq \frac{2}{3}$ のとき $\frac{3}{2}x^2 \leq x$ なので、求める面積を S とおくと

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\frac{2}{3}} \left(x - \frac{3}{2}x^2 \right) dx \\ &= \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3 \right]_0^{\frac{2}{3}} \\ &= \frac{2}{27} \quad \cdots(\text{答}) \end{aligned}$$

- (2) $y = \frac{3}{2}x^2$
 $y' = 3x$

よって、 $2y - 3x^2 = 0$ の $x = n$ (n は自然数) における接線の傾きは
 $a_n = 3n \quad \cdots(\text{答})$

- (3) $x \geq 1$ のとき $\frac{3}{2}x^2 \geq x$ なので、

$$\begin{aligned} b_n &= \int_n^{n+1} \left(\frac{3}{2}x^2 - x \right) dx \\ &= \left[\frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 \right]_n^{n+1} \\ &= \frac{n}{2}(3n+1) \quad \cdots(\text{答}) \end{aligned}$$

- (4) $b_1 = 2, b_2 = 7, b_3 = 15, b_4 = 26, b_5 = 40, b_6 = 57$ より
 $S_1 = 2, S_2 = 9, S_3 = 24, S_4 = 50, S_5 = 90, S_6 = 147$ である。
 よって、 S_n が初めて 100 をこえるのは第 6 項目。 $\cdots(\text{答})$