

I

(1)

$y = ax^2 + bx + c$ が $(-2, 0), (1, 3), (2, -4)$ を通るので、これらの座標を曲線の式に代入し、

$$\begin{cases} 0 = 4a - 2b + c \\ 3 = a + b + c \\ -4 = 4a + 2b + c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = -1 \\ c = 6 \end{cases} \quad \text{を得る。} \quad (\text{答}) \quad \begin{cases} a = -2 \\ b = -1 \\ c = 6 \end{cases}$$

(2)

$y = x^2 - 4x + k + 2$ が x 軸と接する。 $\Leftrightarrow x^2 - 4x + k + 2 = 0$ が重解を持つ。

よって $x^2 - 4x + k + 2 = 0$ の判別式を D として、 $D = 0$ ならよい。

$$D/4 = (-2)^2 - (k+2) = 0 \quad \text{したがって } k = 2 \quad (\text{答}) \quad k = 2$$

(3)

$$\begin{aligned} \sin 75^\circ &= \sin(90^\circ - 15^\circ) \\ &= \cos 15^\circ \\ &= a \end{aligned}$$

$$(\text{答}) \quad \sin 75^\circ = a$$

(4)

$$100 + 101 + \dots + 200 = \sum_{k=100}^{200} k = \sum_{k=1}^{200} k - \sum_{k=1}^{99} k = \frac{200 \cdot 201}{2} - \frac{99 \cdot 100}{2} = 20100 - 4950 = 15150$$

$$(\text{答}) \quad 15150$$

(5)

mathematics の中には、a,m,t が 2 つずつ、c,e,h,i,s が 1 つずつある。

よってこの 11 文字からできる順列は、

$$\frac{11!}{2!2!2!} = 4989600 \text{ 個} \quad (\text{答}) \quad 4989600 \text{ 個}$$

II

(1)

一般項 ℓ_n は、 $(0,0)$ と (i,n) の距離だから、 $\ell_n^2 = i^2 + n^2$

またその和は、

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^n \ell_j^2 &= \sum_{j=1}^n (i^2 + j^2) \\ &= \sum_{j=1}^n i^2 + \sum_{j=1}^n j^2 = i^2 n + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n}{6} (6i^2 + 2n^2 + 3n + 1)\end{aligned}$$

	一般項	$\ell_n^2 = i^2 + n^2$
(答)	和	$\frac{n}{6} (6i^2 + 2n^2 + 3n + 1)$

(2)

さいころを $(i+j)$ 回投げて (i,j) に到達するには偶数が i 回と奇数が j 回出ればよい。

よって $P_{i,j} = {}^{i+j}C_i \left(\frac{1}{2}\right)^i \left(\frac{1}{2}\right)^j = \frac{(i+j)!}{i!j!} \left(\frac{1}{2}\right)^{i+j}$

(答) $P_{i,j} = \frac{(i+j)!}{i!j!} \left(\frac{1}{2}\right)^{i+j}$

(3)

$(0,5), (5,0)$ に達したときは三角形はできず、面積は 0 である。

$(4,1), (3,2), (2,3), (1,4)$ に達する確率とそのときの $\triangle OAB$ の面積は、(2)の結果も用いて順番に表すと

確率	$\begin{cases} \frac{5!}{4!1!} \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{5}{2^5} \\ \frac{5!}{3!2!} \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{10}{2^5} \\ \frac{5!}{2!3!} \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{10}{2^5} \\ \frac{5!}{1!4!} \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{5}{2^5} \end{cases}$	面積	$\begin{cases} 4 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 2 \\ 3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 3 \\ 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} = 3 \\ 1 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = 2 \end{cases}$
----	--	----	--

よって求める期待値は、

$$0 \cdot P_{5,0} + 2 \cdot \frac{5}{2^5} + 3 \cdot \frac{10}{2^5} + 3 \cdot \frac{10}{2^5} + 2 \cdot \frac{5}{2^5} + 0 \cdot P_{0,5} = \frac{5}{2} \quad (\text{答})$$

III

(1)

(証明)

x_1, x_2 は正の数より $\sqrt{x_1}, \sqrt{x_2}$ は実数であるため、 $(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})^2 \geq 0$ が成り立つ。

$$(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})^2 = x_1 + x_2 - 2\sqrt{x_1 x_2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(x_1 + x_2) \geq \sqrt{x_1 x_2} \quad (\text{証明終})$$

(2)

(証明)

(1)より正数 x_1, x_2, x_3, x_4 について、 $\frac{1}{2}(x_1 + x_2) \geq \sqrt{x_1 x_2}$ $\frac{1}{2}(x_3 + x_4) \geq \sqrt{x_3 x_4}$ が成り立つ。

この辺々を加えて両辺を2で割れば、

$$\frac{1}{4}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) \geq \frac{1}{2}(\sqrt{x_1 x_2} + \sqrt{x_3 x_4})$$

さらに $\sqrt{x_1 x_2}$ と $\sqrt{x_3 x_4}$ は正数だから、 $\frac{1}{2}(\sqrt{x_1 x_2} + \sqrt{x_3 x_4}) \geq \sqrt{\sqrt{x_1 x_2} \sqrt{x_3 x_4}} = \sqrt[4]{x_1 x_2 x_3 x_4}$

したがって、

$$\frac{1}{4}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) \geq \sqrt[4]{x_1 x_2 x_3 x_4} \text{ が成り立つ。} \quad (\text{証明終})$$

(3)

(証明)

$x_4 = \sqrt[3]{x_1 x_2 x_3}$ として(2)で示した式に代入すれば、

$$\frac{1}{4}(x_1 + x_2 + x_3 + \sqrt[3]{x_1 x_2 x_3}) \geq \sqrt[4]{x_1 x_2 x_3} \cdot \sqrt[4]{\sqrt[3]{x_1 x_2 x_3}} = \sqrt[4]{x_1 x_2 x_3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}(x_1 + x_2 + x_3) \geq \frac{3}{4}\sqrt[4]{x_1 x_2 x_3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3) \geq \sqrt[3]{x_1 x_2 x_3}$$

となる。

(証明終)