

$$\frac{a_2}{b_2} \leq \frac{a_1}{b_1} \Leftrightarrow a_1 b_2 - a_2 b_1 \geq 0 \quad \cdots \textcircled{1} \quad \because b_1, b_2 \text{ は正}$$

$$\frac{a_2 - a_1}{b_2 - b_1} \leq \frac{a_1}{b_1} \Leftrightarrow \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{b_1 (b_2 - b_1)} \geq 0 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\frac{b_1 - b_2}{a_1 - a_2} \leq \frac{b_1}{a_1} \Leftrightarrow \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{a_1 (a_1 - a_2)} \geq 0 \quad \cdots \textcircled{3}$$

①のもとで、②も③も成立しないと仮定すると、 a_1, b_1 が正より

$$b_2 - b_1 < 0 \text{ かつ } a_1 - a_2 < 0$$

が成り立つ。このとき、

$$a_1 b_2 - a_2 b_1 < a_1 b_2 - a_1 b_1 = a_1 (b_2 - b_1) < 0$$

となり、①に矛盾。

よって、①が成立する時は②か③のどちらかが成立する。

$$\text{つまり、} \frac{a_2}{b_2} \leq \frac{a_1}{b_1} \text{ ならば } \frac{a_2 - a_1}{b_2 - b_1} \leq \frac{a_1}{b_1} \text{ または } \frac{b_1 - b_2}{a_1 - a_2} \leq \frac{b_1}{a_1}$$

が成立することが示された。

(証明終)

II

$$3x(bx+c) \leq (x+a)(2x+3) \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$x+a \leq x(bx+c) \quad \cdots \textcircled{2}$$

問1 ①, ②に $x=0$ を代入して

$$0 \leq 3a, a \leq 0$$

を得る。よって、 $a=0$ $\cdots$ (答)

さらに、 $x>0$ のとき

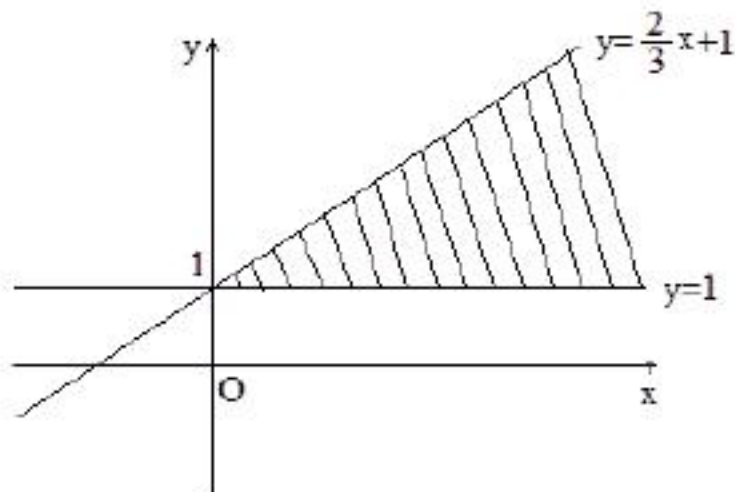
$$\textcircled{1} \Leftrightarrow 3(bx+c) \leq 2x+3 \quad \cdots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{2} \Leftrightarrow 1 \leq bx+c \quad \cdots \textcircled{4}$$

となる。③かつ④は

$$1 \leq bx+c \leq \frac{2}{3}x+1$$

と同値である。これは $y=bx+c$ のグラフが $x>0$ において下図斜線部 (境界含む) に含まれていることと同値である。図より、 $y=bx+c$ の y 切片は 1 でなければならない。よって、 $c=1$ $\cdots$ (答)



問2 上図より明らかに $0 \leq b \leq \frac{2}{3}$ $\cdots$ (答)

III

問 1 直線(2)と直交する直線の傾きは-1

よって、 (t, t^2) を通る傾き -1 の直線を求めればよく、その方程式は

$$\begin{aligned}y &= -1 \cdot (x - t) + t^2 \\y &= -x + t + t^2 \quad \cdots(\text{答})\end{aligned}$$

問 2 曲線(1)上の点 (t, t^2) と直線(2)の距離は、点と直線の距離の公式より

$$\frac{|t - t^2 - 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left| -\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{4} \right| = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \right\}$$

よって $t = \frac{1}{2}$ のとき点 (t, t^2) と直線(2)の距離は最小となり

その距離は

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3\sqrt{2}}{8} \quad \cdots(\text{答})$$

そのとき $P_1(t, t^2)$ より、 $P_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ $\cdots(\text{答})$

また、このとき問 1 で求めた直線と直線(2)の交点が P_2 となる。

$$y = -x + \frac{3}{4}, y = x - 1$$

の 2 直線の交点の座標は

$$\left(\frac{7}{8}, -\frac{1}{8}\right)$$

よって $P_2\left(\frac{7}{8}, -\frac{1}{8}\right)$ $\cdots(\text{答})$

IV

- 問 1 まず 1 の箱に 1 のカードを入れ、次に 2 の箱に 2 のカードを入れ、最後に 3 の箱に 3 のカードを入れる確率を求めればよい。

$$\frac{2}{6} \times \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{30} \quad \cdots(\text{答})$$

- 問 2 まず 1 の箱に 1 のカードを入れ、次に 2 の箱に 2 のカードを入れ、最後に 3 の箱に 3 以外のカードを入れる確率を求めればよい。

$$\frac{2}{6} \times \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{10} \quad \cdots(\text{答})$$