

I

問 1 l, m を自然数とする。

$n+5$ が 7 の倍数なので

$$n+5=7l \quad \dots \textcircled{1}$$

$n+7$ が 5 の倍数なので

$$n+7=5m \quad \dots \textcircled{2}$$

と、それぞれおける。

ここで、①の両辺に 7 を足して

$$n+12=7l+7=7(l+1) \quad \dots \textcircled{3}$$

②の両辺に 5 を足して

$$n+12=5m+5=5(m+1) \quad \dots \textcircled{4}$$

③, ④より $n+12$ は 7 の倍数かつ 5 の倍数。

すなわち $n+12$ は 35 の倍数。

よって、 $n+12$ を 35 で割った余りは 0 ...(答)

問 2 問 1 より、 $(*) \Rightarrow n+12$ は 35 の倍数。

よって、 $n+12$ が 35 の倍数である n しか $(*)$ の条件は満たせない。

$n+12$ が 35 の倍数である自然数 n のうち最小のものは $n=23$

$$23+5=28=7 \times 4$$

$$23+7=30=5 \times 6$$

より、 $n=23$ は $(*)$ の条件を確かに満たす。

よって、 $(*)$ の条件を満たす最小の n は 23 ...(答)

問 1 点 $(a, 0)$ から $y = x^2 + 1$ へ引いた接線の接点を $(t, t^2 + 1)$ とする。

$$y = x^2 + 1$$

$$y' = 2x$$

より、接線の式は

$$y = 2t(x - t) + t^2 + 1$$

この直線が点 $(a, 0)$ を通るので

$$0 = 2t(a - t) + t^2 + 1$$

これを t についての 2 次方程式とみて解くと

$$t = a + \sqrt{a^2 + 1}, a - \sqrt{a^2 + 1}$$

$$a - \sqrt{a^2 + 1} < 0 < a + \sqrt{a^2 + 1}$$

なので、

$$m_1 = 2(a + \sqrt{a^2 + 1})$$

他方の接線の傾きを m_2 とおくと、

$$m_2 = 2(a - \sqrt{a^2 + 1})$$

$$\begin{aligned} \therefore m_1 m_2 &= \left\{ 2(a + \sqrt{a^2 + 1}) \right\} \left\{ 2(a - \sqrt{a^2 + 1}) \right\} \\ &= -4 \end{aligned}$$

$$\therefore m_2 = -\frac{4}{m_1} \quad \dots(\text{答})$$

問 2 l_1 と x 軸とでなす角を θ_1 , l_2 と x 軸とでなす角を θ_2 とおく。

l_1 が l_2 と x 軸とでなす角を 2 等分するとは

$$\theta_2 = 2\theta_1$$

ということである。

加法定理より $\tan(2\theta) = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$ なので

l_1 が l_2 と x 軸とでなす角を 2 等分するとき

$$\tan \theta_2 = \tan(2\theta_1) = \frac{2 \tan \theta_1}{1 - \tan^2 \theta_1}$$

が成立する。

これと、 $m_1 = \tan \theta_1, m_2 = \tan \theta_2$ より

$$m_2 = \frac{2m_1}{1 - m_1^2} \Leftrightarrow -\frac{4}{m_1} = \frac{2m_1}{1 - m_1^2} \Leftrightarrow m_1^2 = 2$$

これに $m_1 = 2(a + \sqrt{a^2 + 1})$ を代入すると

$$4a\sqrt{a^2 + 1} = -4a^2 - 1 \quad (< 0)$$

よって a は負であり、このもとで両辺をそれぞれ 2 乗して

$$a^2 = \frac{1}{8}$$

を得る。 a は負なので

$$a = -\frac{\sqrt{2}}{4} \quad \dots(\text{答})$$

Ⅲ

問 1

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 f(x) dx &= \int_{-1}^1 (ax^2 + bx + c) dx \\&= \left[\frac{a}{3} x^3 + \frac{1}{2} bx^2 + cx \right]_{-1}^1 \\&= \frac{2}{3} (a + 3c) \\&= 0 \\ \therefore a + 3c &= 0 \qquad \dots(\text{答})\end{aligned}$$

問 2

$$b = a, c = -\frac{a}{3} \text{ より}$$

$$f(-1) = a - a - \frac{a}{3} = -\frac{a}{3}$$

$$f(1) = a + a - \frac{a}{3} = \frac{5}{3}a$$

よって

$$\{f(-1)\}\{f(1)\} = -\frac{5}{9}a^2 < 0 \quad (\because f(x) \text{ は 2 次関数なので } a \neq 0)$$

なので、 $f(-1)$ と $f(1)$ は異符号。

よって、中間値の定理より

-1 と 1 の間に $f(x) = 0$ となる x が 1 つ存在する。 ...(証明終)