

(1)

$|\vec{a}+\vec{b}|=6$ の両辺を 2 乗すると,

$$\begin{aligned} |\vec{a}+\vec{b}|^2 &= |\vec{a}|^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{b}|^2 \\ &= 3^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b} + 4^2 = 6^2 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = \frac{11}{2}$$

よって,

$$\begin{aligned} |\vec{a}-\vec{b}|^2 &= |\vec{a}|^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{b}|^2 \\ &= 3^2 - 2\cdot\frac{11}{2} + 4^2 \\ &= 14 \end{aligned}$$

$|\vec{a}-\vec{b}|>0$ より,

$$|\vec{a}-\vec{b}| = \sqrt{14}$$

である。

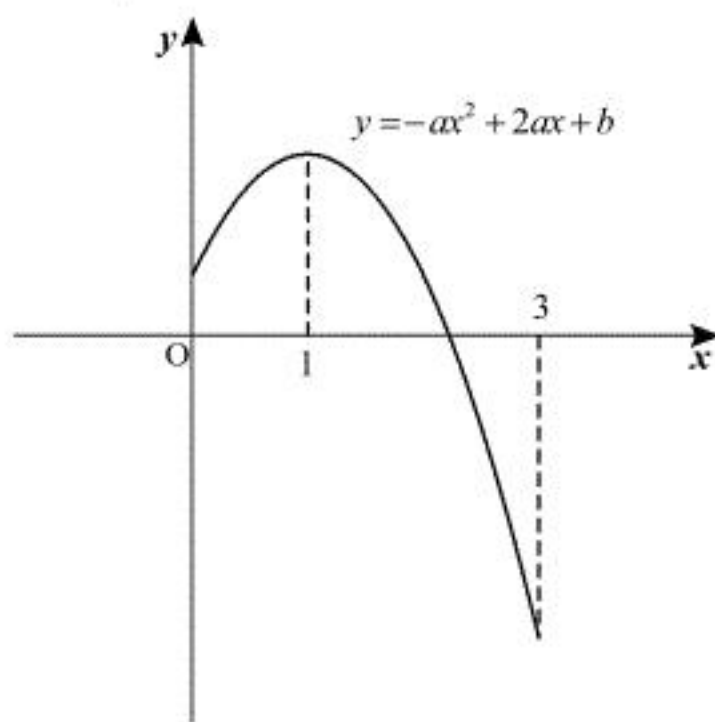
$$\text{(答)} \quad |\vec{a}-\vec{b}| = \sqrt{14}$$

(2)

2 次関数 $y=-ax^2+2ax+b$ ($0 \leq x \leq 3$) は,

$$\begin{aligned} y &= -ax^2 + 2ax + b \\ &= -a(x-1)^2 + a + b \end{aligned}$$

と変形でき、 $a>0$ であるから、この 2 次関数のグラフは次図である。(ただし、端点を含む)



よって、 $x=1$ で最大値、 $x=3$ で最小値をとる。ゆえに、最大値について

$$\begin{aligned} -a \cdot 1^2 + 2a \cdot 1 + b &= 3 \\ \Leftrightarrow a + b &= 3 \end{aligned} \quad \dots \textcircled{1}$$

最小値について,

$$\begin{aligned} -a \cdot 3^2 + 2a \cdot 3 + b &= -5 \\ \Leftrightarrow 3a - b &= 5 \end{aligned} \quad \dots \textcircled{2}$$

したがって、 $\textcircled{1}$ 、 $\textcircled{2}$ を連立して解くと、

$$a=2, b=1$$

となる。

$$\text{(答)} \quad a=2, b=1$$

(3)

$$\cos \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

を満たす θ ($0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$) は,

$$\theta = 150^\circ$$

である。

$$\text{(答)} \quad \theta = 150^\circ$$

(4)

$x-2, x+1, x+7$ がこの順に等比数列をなすので、

$$\begin{aligned} (x+1)^2 &= (x-2)(x+7) \\ \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 &= x^2 + 5x - 14 \\ \therefore x &= 5 \end{aligned}$$

である。

$$\text{(答)} \quad x=5$$

(5)

どの玉も取り出される確率は等しいので、1 回の操作で白玉、赤玉の取り出される確率はそれ

ぞれ、 $\frac{3}{5}, \frac{2}{5}$ である。ゆえに 1 回目に白、2 回目に赤、3 回目に赤の玉が取り出される確率は、

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{12}{125}$$

である。

$$\text{(答)} \quad \frac{12}{125}$$

(6)

関数 $y=x^3-12x$ を x で微分すると、

$$\begin{aligned} y' &= 3x^2 - 12 \\ &= 3(x+2)(x-2) \end{aligned}$$

よって、 $-1 \leq x \leq 3$ の範囲で $y'=0$ を解くと $x=2$ なので、次の増減表が書ける。

x	-1	...	2	...	3
y'		-	0	+	
y	11	$\searrow$	-16	$\nearrow$	-9

したがって、求める最大値は 11、最小値は -16 である。

$$\text{(答)} \quad \begin{array}{ll} \text{最大値} & 11 \\ \text{最小値} & -16 \end{array}$$

(7)

$f'(x)=6x^2-2x+3$ を x で積分すると、

$$f(x)=2x^3-x^2+3x+C$$

ただし、 C は積分定数である。また、

$$\begin{aligned} f(1) &= 2 \cdot 1^3 - 1^2 + 3 \cdot 1 + C = 7 \\ \therefore C &= 3 \end{aligned}$$

したがって、

$$f(x)=2x^3-x^2+3x+3$$

である。

$$\text{(答)} \quad f(x)=2x^3-x^2+3x+3$$

II

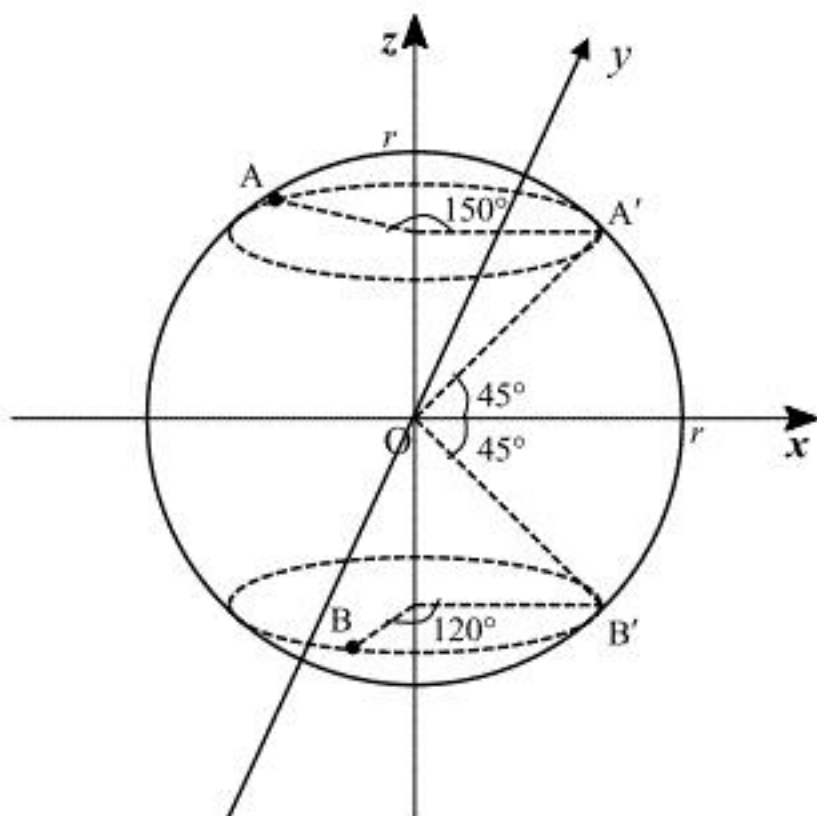
(1)

地球の半径 6378km を r とおく。北極、南極、北緯 0 度東経 0 度の地点がそれぞれ、 $(0,0,r)$ 、 $(0,0,-r)$ 、 $(r,0,0)$ にあるように座標軸を設定する。北緯 45 度東経 0 度の地点を A' 、南緯 45 度東経 0 度の地点を B' とおくと、それぞれの座標は

$$A': \left(r \cos 45^\circ, 0, r \sin 45^\circ \right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} r, 0, \frac{\sqrt{2}}{2} r \right)$$

$$B': \left(r \cos 45^\circ, 0, -r \sin 45^\circ \right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} r, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2} r \right)$$

となる。



図より、点 A は点 A' を z 軸まわりに z 軸の正方向から見て反時計回りに 150° 回転させた点なので、 A の座標は

$$A: \left(r \cos 45^\circ \cos 150^\circ, r \cos 45^\circ \sin 150^\circ, r \sin 45^\circ \right) = \left(-\frac{\sqrt{6}}{4} r, \frac{\sqrt{2}}{4} r, \frac{\sqrt{2}}{2} r \right)$$

である。さらに、点 B は点 B' を z 軸まわりに z 軸の正方向から見て時計回りに 120° 回転させた点なので、 B の座標は

$$B: \left(r \cos 45^\circ \cos(-120^\circ), r \cos 45^\circ \sin(-120^\circ), -r \sin 45^\circ \right) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{4} r, -\frac{\sqrt{6}}{4} r, -\frac{\sqrt{2}}{2} r \right)$$

である。したがって、 $OA = OB = r$ に注意すれば、

$$\begin{aligned} \cos \angle AOB &= \frac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}| |\overrightarrow{OB}|} \\ &= \frac{\left(-\frac{\sqrt{6}}{4} r \right) \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{4} r \right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{4} r \right) \cdot \left(-\frac{\sqrt{6}}{4} r \right) + \frac{\sqrt{2}}{2} r \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} r \right)}{r^2} \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

よって、 $0^\circ \leq \angle AOB \leq 180^\circ$ より、

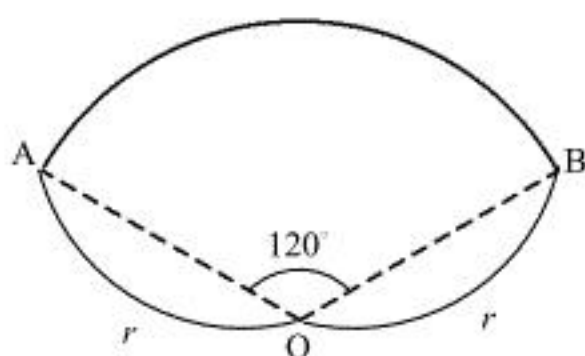
$$\angle AOB = 120^\circ$$

である。

(答) $\angle AOB = 120^\circ$

(2)

A から B へ地球の表面上を最短の時間で移動するには、最短距離を移動経路とすればよい。最短距離は(1)より、 $\angle AOB = 120^\circ$ となる扇形の弧を経路としたときの距離である。



よって、 AB 間の最短距離は、

$$2 \cdot 3.14r \cdot \frac{120^\circ}{360^\circ} = \frac{2}{3} \cdot 3.14r = 13351.28\text{km}$$

である。

(答) 13351.28km

Ⅲ

(1)

サイコロを2個投げたときに、出た目の和が10以上となる目の出方は、2つのサイコロを区別して、

$$(4, 6), (5, 5), (5, 6), (6, 4), (6, 5), (6, 6)$$

の6通りである。2個のサイコロの全ての目の出方は $6^2 = 36$ 通りなので、出た目の和が10以上となる確率は、

$$\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

である。余事象を考えると、出た目の和が9以下になる確率は

$$1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

である。

和が10以上である事象(A と呼ぶ。), 9以下である事象(B と呼ぶ。)が起こる回数をそれぞれ p 回, q 回とすると、到達する点の y 座標は $2p - q$ である。 x 軸方向には、出た目によらず+1ずつ進むので、5回投げて点 $(5, 4)$ に達する条件は

$$2p - q = 4 \quad \cdots \textcircled{1}$$

かつ

$$p + q = 5 \quad \cdots \textcircled{2}$$

である。①, ②を連立して解くと、

$$p = 3, q = 2$$

したがって、 A, B がそれぞれ3回, 2回起これば良いので、求める確率は、

$${}_5C_3 \left(\frac{1}{6} \right)^3 \left(\frac{5}{6} \right)^2 = \frac{125}{3888}$$

である。

$$\text{(答)} \quad \frac{125}{3888}$$

(2)

5回投げて点 P が点 $(5, 4)$ に達した後、6回目にサイコロを振ったときに達することのできる点は、 $(6, 6)$ か $(6, 3)$ のみである。したがって、サイコロを6回投げて、点 P が $(5, 4)$ を通り点 $(6, 5)$ に達することはないため、求める確率は0である。

$$\text{(答)} \quad 0$$

(3)

5回投げて点 P が点 $(5, 4)$ に達した後、サイコロを2回投げて A, B がそれぞれ r 回, s 回起こるとする。サイコロを7回投げたときに到達する点の y 座標は $4 + 2r - s$ であるので、 $(5, 4)$ を通る条件のもとで、 $(7, 5)$ に達する条件は

$$\begin{aligned} 4 + 2r - s &= 5 \\ \Leftrightarrow 2r - s &= 1 \quad \cdots \textcircled{3} \end{aligned}$$

かつ

$$r + s = 2 \quad \cdots \textcircled{4}$$

である。③, ④を連立して解くと、

$$r = s = 1$$

つまり、6回目と7回目では A, B がそれぞれ1回ずつ起これば良い。

(1)より、5回投げて点 P が点 $(5, 4)$ に達する確率は

$$\frac{125}{3888}$$

であり、6回目と7回目で A, B がそれぞれ1回ずつ起こる確率は、

$${}_2C_1 \left(\frac{1}{6} \right) \left(\frac{5}{6} \right) = \frac{5}{18}$$

である。したがって、求める確率は、

$$\frac{125}{3888} \cdot \frac{5}{18} = \frac{625}{69984}$$

である。

$$\text{(答)} \quad \frac{625}{69984}$$