

I

問 1

自然数のうち、14 の倍数であるものを小さい順に並べていき、それぞれについて 11 で割った余りを求めると、

14 の倍数	11 で割った余り
14	3
28	6
42	9
56	1

となる。よって、 $k=56$ である。

(答) $k=56$

問 2

$k=56$ なので、

$$\begin{aligned}22+77+k &= 22+77+56 \\ &= 155\end{aligned}$$

155 を 2, 7, 11 で割るとそれぞれ、

$$155 \div 2 = 77 \text{ 余り } 1$$

$$155 \div 7 = 22 \text{ 余り } 1$$

$$155 \div 11 = 14 \text{ 余り } 1$$

となって、確かに 155 は 2, 7, 11 のどれで割っても 1 余る。

(証明終)

問 3

ある自然数 $n(\neq 1)$ が、2, 7, 11 のどれで割っても 1 余ることはある自然数 $n-1$ が 2, 7, 11 のどれでも割り切れることと等しい。2, 7, 11 の最小公倍数は $2 \cdot 7 \cdot 11 = 154$ であるため、求める自然数 n に対して、

$$n-1=154p$$

が成り立つ。ただし、 p は自然数である。このうち $400 \leq n \leq 700$ である自然数を考えれば、

$$400 \leq n \leq 700$$

$$\Leftrightarrow 399 \leq n-1=154p \leq 699$$

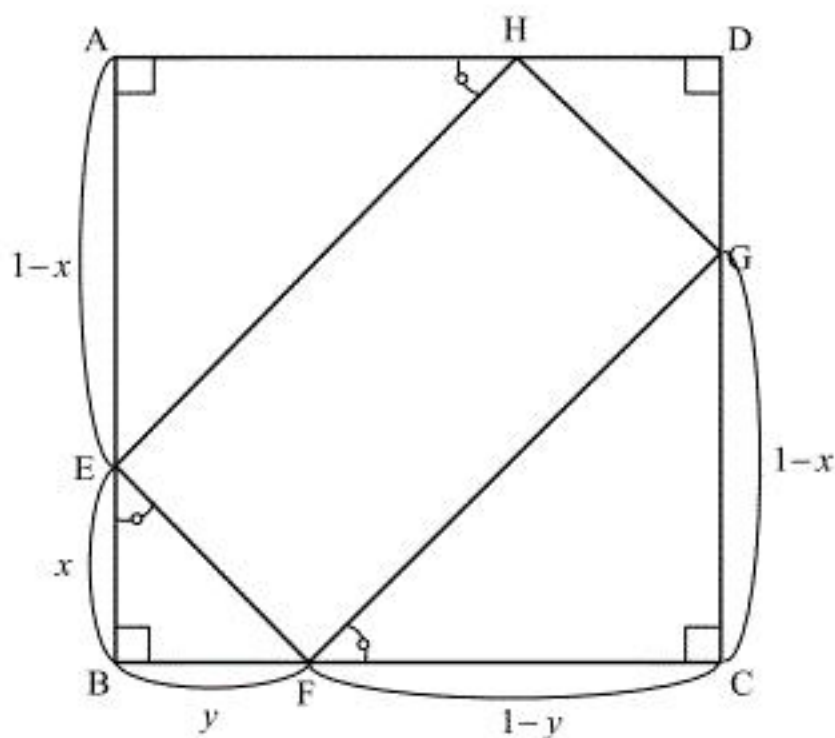
これを満たす自然数 p は、 $p=3, 4$ のみである。 $p=3, 4$ のとき n はそれぞれ 463, 617 となり、これが求める自然数である。

(答) $n=463, 617$

Ⅱ

問 1

$BF = y$ とおく。このとき、 $AE = 1 - x$, $FC = 1 - y$ である。



$\angle HEF = 90^\circ$ なので、

$$\angle AHE = 90^\circ - \angle AEH = \angle BEF \quad \cdots \textcircled{1}$$

同様にして、

$$\angle BEF = \angle CFG \quad \cdots \textcircled{2}$$

も成り立つ。よって、 $\textcircled{2}$ と $\angle EAH = \angle GCF (= 90^\circ)$ 、 $FG = HE$ とから、

$$\triangle AEH \cong \triangle CGF$$

ゆえに、

$$CG = AE = 1 - x$$

また、 $\textcircled{1}$ と $\angle FBE = \angle GCF (= 90^\circ)$ から

$$\triangle BFE \sim \triangle CGF$$

よって、

$$\begin{aligned} BE : BF &= CF : CG \\ \Leftrightarrow x : y &= (1 - y) : (1 - x) \\ \Leftrightarrow y(1 - y) &= x(1 - x) \\ \Leftrightarrow (y - x)(y + x - 1) &= 0 \\ \therefore y &= x, 1 - x \end{aligned}$$

したがって、線分 BF の長さは x または $1 - x$ である。

(答) $BF = x, 1 - x$

問 2

[1] $BF = x$ のとき、

$FC = 1 - x$, $CG = 1 - x$ と $\angle FCG = 90^\circ$ より、

$$\triangle FCG \text{ の面積} = \frac{1}{2} FC \cdot CG = \frac{1}{2} (1 - x)^2$$

である。

[2] $BF = 1 - x$ のとき、

$FC = x$, $CG = 1 - x$ なので同様に、

$$\triangle FCG \text{ の面積} = \frac{1}{2} FC \cdot CG = \frac{1}{2} x(1 - x)$$

である。

$$\text{(答)} \quad \triangle FCG \text{ の面積} = \begin{cases} \frac{1}{2} (1 - x)^2 & (BF = x \text{ のとき}) \\ \frac{1}{2} x(1 - x) & (BF = 1 - x \text{ のとき}) \end{cases}$$

Ⅲ

関数 $f(x)$ は、 $x \geq 0$ のとき、

$$\begin{aligned} f(x) &= x \left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{4}x \right) - \frac{3}{4}x^2 + 1 \\ &= \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 1 \end{aligned}$$

$x < 0$ のとき、

$$\begin{aligned} f(x) &= -x \left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{4}x \right) - \frac{3}{4}x^2 + 1 \\ &= -\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 1 \end{aligned}$$

となる。よって、まとめると、

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 1 & (x \geq 0) \\ -\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 1 & (x < 0) \end{cases}$$

問 1

$x < 0$ のとき、

$$f(x) = -\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 1$$

より、 $f(x)$ を x で微分すると、

$$f'(x) = -x^2 - x$$

したがって、

$$f'(a) = -a^2 - a$$

である。

$$(\text{答}) \quad f'(a) = -a^2 - a$$

問 2

$x > 0$ のとき、

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 1$$

より、 $f(x)$ を x で微分すると、

$$f'(x) = x^2 - 2x$$

したがって、

$$f'(b) = b^2 - 2b$$

である。

$$(\text{答}) \quad f'(b) = b^2 - 2b$$

問 3

$$f'(a) = -a^2 - a = -a(a+1) = 0$$

とすると、 $a < 0$ より、 $a = -1$ 。

$$f'(b) = b^2 - 2b = b(b-2) = 0$$

とすると、 $b > 0$ より、 $b = 2$ 。よって、 $f(x)$ について $-2 \leq x \leq 3$ の範囲では、次の増減表が描ける。

x	-2	...	-1	...	0	...	2	...	3
$f'(x)$		-	0	+	0	-	0	+	
$f(x)$	$\frac{5}{3}$	$\searrow$	$\frac{5}{6}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\frac{1}{3}$	$\nearrow$	1

したがって、 $-2 \leq x \leq 3$ における関数 $f(x)$ の最大値、最小値は、

$$\text{最大値} \quad \frac{5}{3} \quad (x = -2)$$

$$\text{最小値} \quad -\frac{1}{3} \quad (x = 2)$$

である。

$$(\text{答}) \quad \text{最大値} \quad \frac{5}{3} \quad (x = -2)$$

$$\text{最小値} \quad -\frac{1}{3} \quad (x = 2)$$

IV

問 1

「 (X, Y) の組み合わせの総数」は、

$${}_{10}P_2 = \frac{10!}{8!} = 90 \text{ (通り)}$$

「 (X, Y, Z) の組み合わせの総数」は、10 個の球から 3 個選んで、それらを並べ替える方法の総数に等しいので、

$${}_{10}P_3 = \frac{10!}{3!} = 720 \text{ (通り)}$$

(答)

(X, Y) の組み合わせの総数 : 90 通り

(X, Y, Z) の組み合わせの総数 : 720 通り

問 2

$X < Y$ となる (X, Y) の組み合わせは、10 個の球から 2 個選んで、小さい順にそれぞれ X, Y とすれば作ることができる。すなわち、 $X < Y$ となる (X, Y) の組み合わせの総数は、10 個の球から 2 個選ぶ方法の総数に等しく、

$${}_{10}C_2 = \frac{10 \cdot 9}{2 \cdot 1} = 45 \text{ (通り)}$$

問 1 の答えから、「 (X, Y) の組み合わせの総数」は 90 通りなので、求める確率は、

$$\frac{45}{90} = \frac{1}{2}$$

である。

(答) $\frac{1}{2}$

問 3

問 2 と同様に、 $X < Z < Y$ となる (X, Y, Z) の組み合わせの総数は、10 個の球から 3 個選ぶ方法の総数に等しく、

$${}_{10}C_3 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 120 \text{ (通り)}$$

問 1 の答えから、「 (X, Y, Z) の組み合わせの総数」は 720 通りなので、求める確率は、

$$\frac{120}{720} = \frac{1}{6}$$

である。

(答) $\frac{1}{6}$