

I

問 1

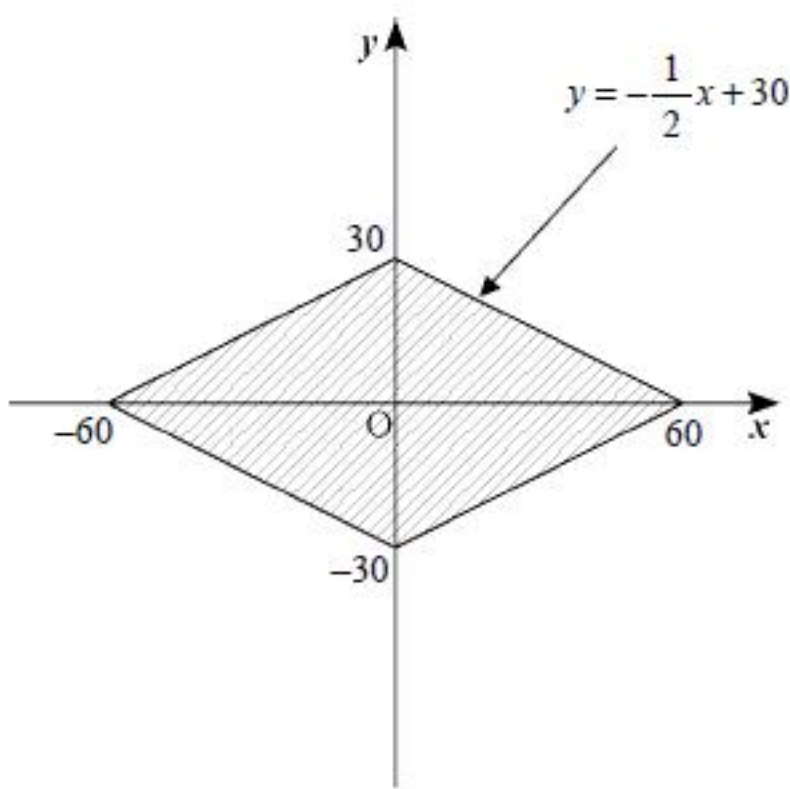
$|x|+2|y| \leq 60$ について、 x を $-x$ に、 y を $-y$ に入れ替えても同様の不等式になる。よってこれを xy 平面上に図示すると、 x 軸対称でかつ y 軸対称な図形となる。

$x \geq 0, y \geq 0$ のとき

$$x+2y \leq 60$$

$$\therefore y \leq -\frac{1}{2}x+30$$

となるので、 D を図示すると次図のようになる。ただし境界を含む。



(答) 前図

問 2

条件より

$$1 \leq m \leq 60-2n \qquad \cdots \textcircled{1}$$

となる。よって整数 m が存在するような整数 n の条件は

$$1 \leq 60-2n$$

$$\Leftrightarrow n \leq \frac{59}{2} = 29.5$$

n は整数であるから、 $n \geq 1$ と合わせて

$$1 \leq n \leq 29$$

となる。ここで $n=k$ ($k=1, 2, \dots, 29$) のとき、 $\textcircled{1}$ より

$$1 \leq m \leq 60-2k$$

となるので、これを満たす m の個数は $60-2k$ である。以上から、求める組の個数は

$$\sum_{k=1}^{29} (60-2k) = 60 \times 29 - 2 \times \frac{1}{2} \times 29 \times 30 = 870$$

である。

(答) 870 個

問 3

問 2 で求めた整数の組の個数は、 D の第 1 象限 (軸上を含まない) に含まれる整数の組の個数であり、図形の対称性より第 2 象限、第 3 象限、第 4 象限にも同じ個数だけ整数の組は存在する。また、整数の組は

$$x \text{ 軸上には } 60-(-60)+1=121 \text{ 個}$$

$$y \text{ 軸上には } 30-(-30)+1=61 \text{ 個}$$

存在するので、原点を重複して数えたことを考慮すると、 D に含まれる整数の組の個数は

$$870 \times 4 + 121 + 61 - 1 = 3661$$

となる。

(答) 3661 個

Ⅱ

問 1

$$\begin{aligned}\log_{10} 19200 &= \log_{10} (2^6 \times 3 \times 10^2) \\ &= 6\log_{10} 2 + \log_{10} 3 + 2\log_{10} 10 \\ &= 6x + y + 2\end{aligned}$$

(答) $6x + y + 2$

問 2

与えられた不等式を利用すると

$$\begin{aligned}20000 &< 2^{11} \times 10 \\ \log_{10} 20000 &< \log_{10} (2^{11} \times 10) \\ x + 4 &< 11x + 1 \\ \therefore x &> \frac{3}{10}\end{aligned}$$

・・・①

となる。

(答) $x > \frac{3}{10}$

問 3

与えられた不等式を利用すると

$$\begin{aligned}19200 &< 3^9 < 20000 \\ \log_{10} 19200 &< \log_{10} 3^9 < \log_{10} 20000 \\ 6x + y + 2 &< 9y < x + 4 \\ \therefore \frac{3}{4}x + \frac{1}{4} &< y < \frac{1}{9}x + \frac{4}{9}\end{aligned}$$

・・・②

となる。ここで、2 直線

$$\begin{cases} y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{4} \\ y = \frac{1}{9}x + \frac{4}{9} \end{cases}$$

の交点の座標は

$$\left(\frac{7}{23}, \frac{11}{23} \right)$$

である。

以下、 x と $\frac{7}{23}$ の大小関係を考える。

$$\begin{aligned}x &\text{ と } \frac{7}{23} \text{ の大小関係} \\ \Leftrightarrow \log_{10} 2 &\text{ と } \frac{7}{23} \text{ の大小関係} \\ \Leftrightarrow 2 &\text{ と } 10^{\frac{7}{23}} \text{ の大小関係} \\ \Leftrightarrow 2^{23} &\text{ と } 10^7 \text{ の大小関係} \\ \Leftrightarrow 2^{16} &\text{ と } 5^7 \text{ の大小関係}\end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned}2^{16} &= 65536 \\ 5^7 &= 78125\end{aligned}$$

であるから、

$$2^{16} < 5^7$$

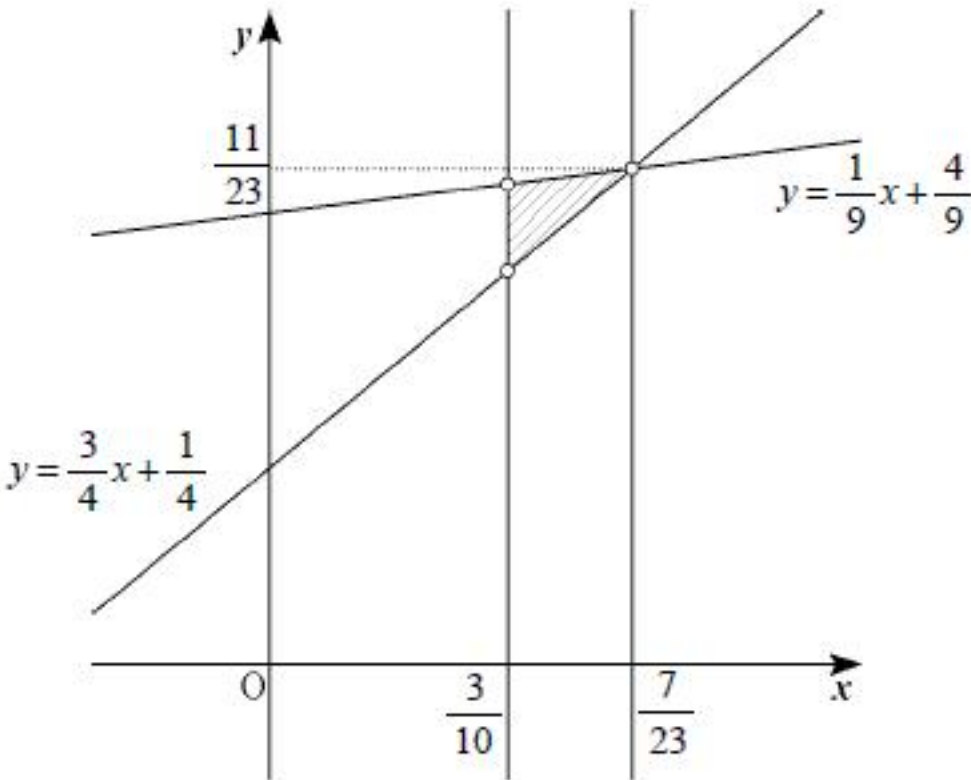
である。よって

$$x < \frac{7}{23}$$

・・・③

となる。

①、②、③の領域の共通部分を xy 平面に図示すると、次図の斜線部ようになる。ただし境界は含まない。



前図より、

$$y < \frac{11}{23}$$

である。

(答) $y < \frac{11}{23}$

Ⅲ

問 1

$x < 0$ のとき

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{5}{8}x^2 - x\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{8}x\right) \\&= \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x\end{aligned}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

となる。したがって接線 l_1 の方程式は

$$y = \left(\frac{1}{2}s - \frac{1}{2}\right)(x - s) + \left(\frac{1}{4}s^2 - \frac{1}{2}s\right)$$

となり、これが点 $(0, -a^2)$ を通るので

$$\begin{aligned}-a^2 &= \left(\frac{1}{2}s - \frac{1}{2}\right)(-s) + \left(\frac{1}{4}s^2 - \frac{1}{2}s\right) \\s^2 &= 4a^2 \\\therefore s &= -2a \quad (\because s < 0)\end{aligned}$$

となる。

(答) $s = -2a$

問 2

$x > 0$ のとき

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{5}{8}x^2 + x\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{8}x\right) \\&= x^2 + \frac{1}{2}x\end{aligned}$$

$$f'(x) = 2x + \frac{1}{2}$$

となる。したがって接線 l_2 の方程式は

$$\begin{aligned}y &= \left(2t + \frac{1}{2}\right)(x - t) + \left(t^2 + \frac{1}{2}t\right) \\-a^2 &= \left(2t + \frac{1}{2}\right)(-t) + \left(t^2 + \frac{1}{2}t\right) \\t^2 &= a^2 \\\therefore t &= a \quad (\because t > 0)\end{aligned}$$

となる。

(答) $t = a$

問 3

l_1, l_2 が直交するので

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{2}s - \frac{1}{2}\right)\left(2t + \frac{1}{2}\right) &= -1 \\ \left(-a - \frac{1}{2}\right)\left(2a + \frac{1}{2}\right) &= -1 \\ 8a^2 + 6a - 3 &= 0 \\\therefore a &= \frac{-3 + \sqrt{33}}{8} \quad (\because a > 0)\end{aligned}$$

となる。

(答) $a = \frac{-3 + \sqrt{33}}{8}$

IV

問 1

サイコロを 1 回投げたとき

$$\text{時計回りする確率は } \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$\text{反時計回りする確率は } \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

である。「 $Q(2)=0$ 」となるときの番号の推移は

$$0 \rightarrow 1 \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow 3 \rightarrow 0$$

のいずれかとなるので、求める確率は

$$\frac{2}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad \frac{4}{9}$$

問 2

「 $Q(2) \neq 0$ かつ $Q(4)=0$ 」となるときの番号の推移は

$$0 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 0$$

のいずれかとなるので、求める確率は

$$\left(\frac{2}{3}\right)^4 + \left(\frac{1}{3}\right)^4 + 2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{25}{81}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad \frac{25}{81}$$

問 3

「 $Q(2)=0$ かつ $Q(4)=0$ 」となるときを考える。これは、2 回の操作で 0 に戻ることが 2 回起こ

ればよいので、問 1 の結果を利用して

$$\left(\frac{4}{9}\right)^2 = \frac{16}{81}$$

となる。

ここで、「 $Q(4)=0$ 」となる確率は「 $Q(2) \neq 0$ かつ $Q(4)=0$ 」となる確率と「 $Q(2)=0$ かつ

$Q(4)=0$ 」となる確率の和であるから

$$\frac{25}{81} + \frac{16}{81} = \frac{41}{81}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad \frac{41}{81}$$