I

ア ⓚ　イ ⓗ　ウ ⓚ　エ ⓙ　オ ⓗ

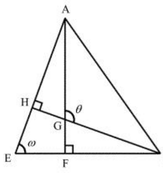
カ ⓚ　キ ⓐ　ク ⓘ

〔解説〕

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\left(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OG}\right)+\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OG}\right)+\left(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OG}\right)+\left(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OG}\right)$$
$$=\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)-4\overrightarrow{OG}$$
$$=\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)-4\times\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}}{4}$$

$\therefore\ \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$　・・・①

ここで，辺 BC の中点を E とし，点 A から面 BCD に降ろした垂線の足を F，点 D から面 ABC に降ろした垂線の足を H とすると，面 AED で正四面体を切った断面図は次図のようになる。



△DGF の内角の和について，

$$\angle DGF+\frac{\pi}{2}+\angle GDF=\pi$$

$$\therefore\ \angle DGF=\frac{\pi}{2}-\angle GDF$$　・・・②

△DEH の内角の和について，

$$\omega+\frac{\pi}{2}+\angle EDH=\pi$$

$$\therefore\ \angle EDH=\frac{\pi}{2}-\omega$$　・・・③

ここで，∠GDF と ∠EDH は同じ角を指しているので，②に③を代入して，

$$\angle DGF=\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{2}-\omega\right)=\omega$$

となる。ここで，∠AGD と ∠DGF の和は π であるから，

$$\theta+\omega=\pi$$
$$\therefore\ \theta=\pi-\omega$$　・・・④

である。次に，

$$\left|\overrightarrow{GA}\right|=\left|\overrightarrow{GB}\right|=\left|\overrightarrow{GC}\right|=\left|\overrightarrow{GD}\right|=x\ \ (x>0)$$

とおけば，

$$\overrightarrow{GA}\cdot\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}\right)=\left|\overrightarrow{GA}\right|^2+\left|\overrightarrow{GA}\right|\left|\overrightarrow{GB}\right|\cos\theta+\left|\overrightarrow{GA}\right|\left|\overrightarrow{GC}\right|\cos\theta+\left|\overrightarrow{GA}\right|\left|\overrightarrow{GD}\right|\cos\theta$$
$$=x^2+x^2\cos\theta+x^2\cos\theta+x^2\cos\theta$$
$$=x^2\left(1+3\cos\theta\right)$$

と計算できる。ここで，①を用いて

$$\overrightarrow{GA}\cdot\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}\right)=\overrightarrow{GA}\cdot\vec{0}=0$$

とも計算できるので，両者の結果を比較して，

$$x^2\left(1+3\cos\theta\right)=0$$

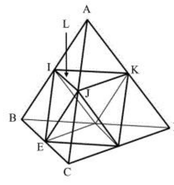
両辺を $x^2\neq0$ で割って，

$$1+3\cos\theta=0$$
$$\therefore\ \cos\theta=-\frac{1}{3}$$

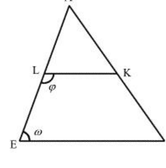
となる。また，これに④を代入して

$$\cos(\pi-\omega)=-\frac{1}{3}$$
$$\therefore\ \cos\omega=\frac{1}{3}$$

となる。



前図のように，辺 AB の中点を I，辺 AC の中点を J，辺 AD の中点を K，線分 IJ の中点を L とおく。このとき，面 AED で正四面体を切った断面図は次の図のようになる。



ここで，直線 LK と直線 ED は平行であるから，同位角の関係から，

$$\angle ALK=\omega$$

となる。∠ALK と ∠KLE の和は π であるから，

$$\omega+\varphi=\pi$$
$$\therefore\ \varphi=\pi-\omega$$

である。よって

$$\cos\varphi=\cos(\pi-\omega)$$
$$=-\frac{1}{3}$$

となる。

ここで△AIJ と△ABC は中点連結定理より相似であり，その相似比は 1 : 2 である。よって

$$IJ:BC=1:2$$

である。したがって，正四面体 ABCD の各辺の中点を頂点として作られる正八面体（以下，これを X と呼ぶ。）の 1 辺の長さと，正四面体 ABCD の 1 辺の長さの比は 1 : 2 である。

ここで，この正四面体の体積を V とおく。四面体 AIJK と正四面体 ABCD は相似で，その相似比は 1 : 2 であるから，その体積比は

$$1^3:2^3=1:8$$

である。よって四面体 AIJK の体積は

$$V\times\frac{1}{8}=\frac{1}{8}V$$

となる。X は正四面体 ABCD から四面体 AIJK と同じものを合わせて 4 つ取り除いたものと考えられるので，その体積は

$$V-4\times\frac{1}{8}V=\frac{1}{2}V$$

となる。今，この正四面体 ABCD と 1 辺の長さが同じ正八面体を考える。この正八面体は X と相似で，その相似比は

（正四面体 ABCD の 1 辺の長さ）:（X の 1 辺の長さ）= 2 : 1

となるので，その体積比は

$$2^3:1^3=8:1$$

である。したがって，正四面体 ABCD と 1 辺の長さが同じ正八面体の体積は

$$\frac{1}{2}V\times\frac{8}{1}=4V$$

となる。したがって，1 辺の長さが等しい正四面体と正八面体の体積の比は，

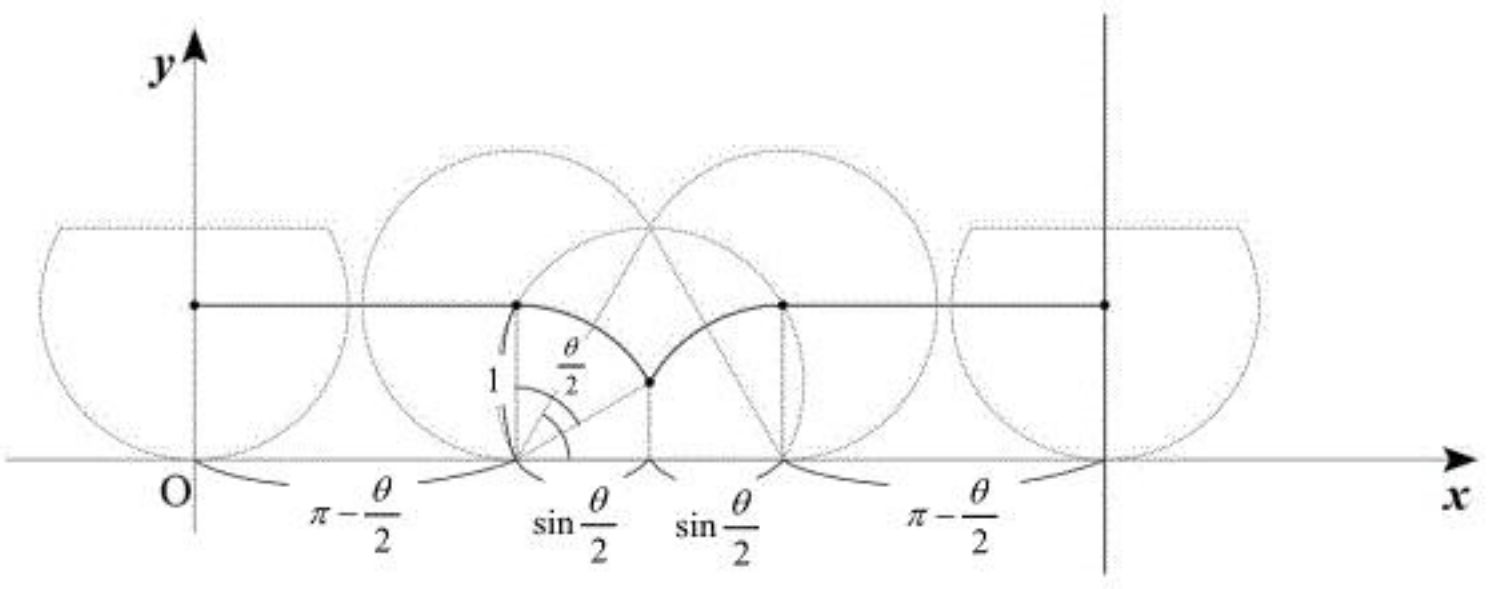
$$V:4V=1:4$$

となる。

II

ケ ⓓ　　コ ⓑ　　サ ⓖ　　シ ⓓ　　ス ⓐ

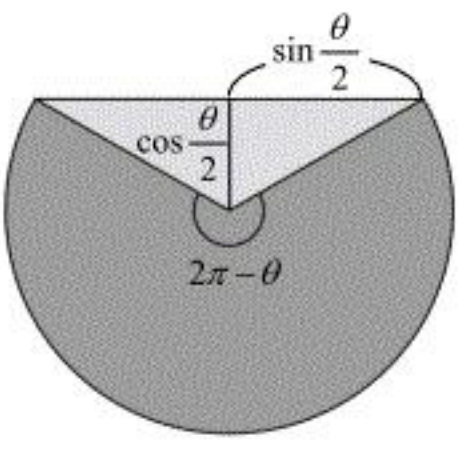
図



曲線C_1の長さは，前図より，

$$2\times\left\{\left(\pi-\frac{\theta}{2}\right)+1\cdot\frac{\theta}{2}\right\}=2\pi$$

である。Dの面積は次図より，



$$(D\text{の面積})=1^2\cdot\pi\times\frac{2\pi-\theta}{2\pi}+2\cdot\frac{1}{2}\cdot\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

$$=\pi-\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

である。ここで，C_1，x軸，y軸と直線$x=b$とで囲まれる領域の面積をSとすると

$$S=2\times\left\{\left(\pi-\frac{\theta}{2}\right)+\left(1^2\cdot\pi\times\frac{\frac{\theta}{2}}{2\pi}\right)+\frac{1}{2}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right\}$$

$$=2\pi-\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

$\therefore\ S=\pi+(D\text{の面積})$

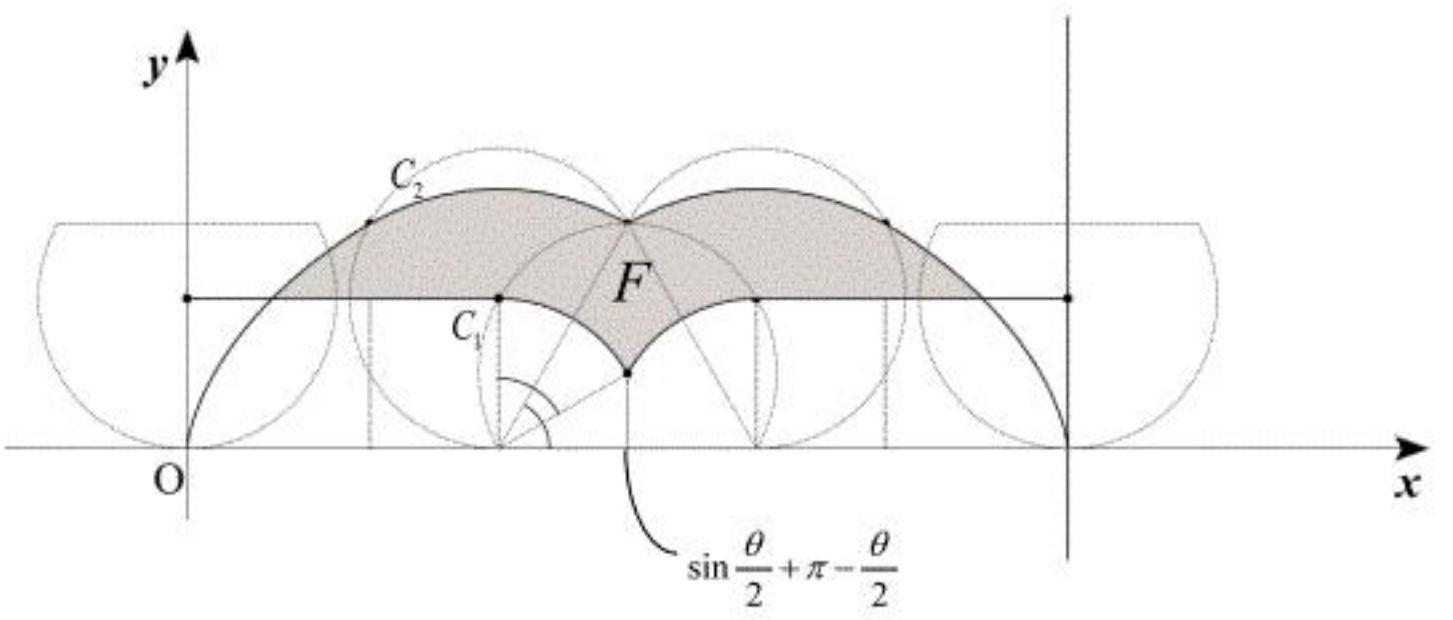
媒介変数表示すると，円が角度φ（$0\leqq\varphi\leqq\pi-\frac{\theta}{2}$）だけ回転したとき，Aの座標は$(\varphi,1)$，Bの座標は$(\varphi-\sin\varphi,1-\cos\varphi)$となる。ここで，$x_1$はBの$y$座標が1となるときのBの$x$座標である。Bの$y$座標が1となるときの$\varphi$は，

$$1-\cos\varphi=1$$
$$\cos\varphi=0$$

$$\therefore\ \varphi=\frac{\pi}{2}\quad\left(\because\ 0\leqq\varphi\leqq\pi-\frac{\theta}{2}\right)$$

このとき，Bのx座標$(=x_1)$は，

$$x_1=\frac{\pi}{2}-\sin\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}-1$$



次に，F内の点で最大のy座標を考える。対称性から，$x_1\leqq x\leqq\left(\sin\frac{\theta}{2}+\pi-\frac{\theta}{2}\right)$のみで考えれば十分である。$F$内の点で最大の$y$座標は，線分SBが$x$軸に垂直に立ったときの点Bの$y$座標であり，

$$2\sin\frac{2\pi-\theta}{4}=2\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{4}\right)=2\cos\frac{\theta}{4}$$

直線$x=k$と領域Fの交わりの長さ$L(k)$は，$x=k$における点A, Bのy座標をそれぞれ$y_A(k)$，$y_B(k)$として，

$$L(k)=y_B(k)-y_A(k)$$

と表される。

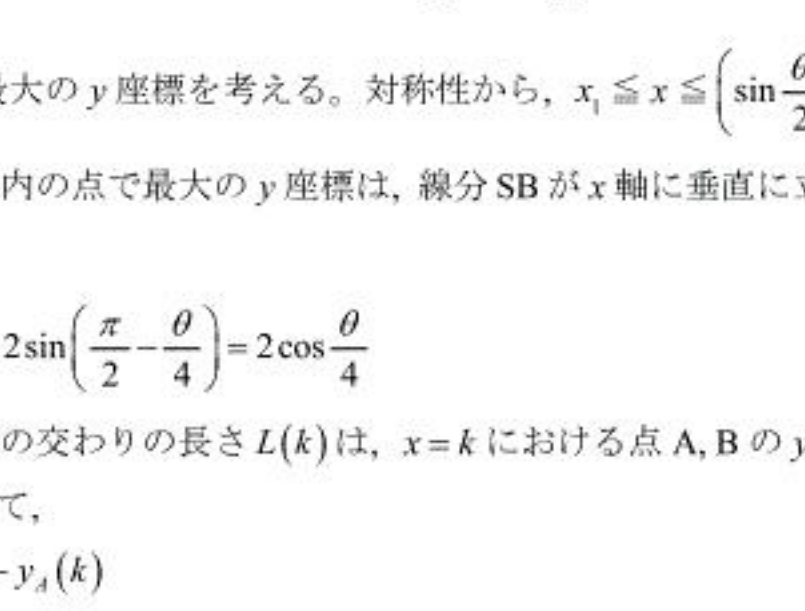
[1] $x_1<k\leqq\pi-\frac{\theta}{2}$のとき

$$y_A(k)=1\ (\text{一定})$$

であり，$y_B(k)$はkに関して単調増加である。ゆえに$L(k)$の最大値は

$$y_B\left(\pi-\frac{\theta}{2}\right)-y_A\left(\pi-\frac{\theta}{2}\right)=2\cos\frac{\theta}{4}-1$$

[2] $\pi-\frac{\theta}{2}<k\leqq\sin\frac{\theta}{2}+\pi-\frac{\theta}{2}$のとき



前図のようにC_1は半径1の円の弧の一部を描き，C_2は半径$2\cos\frac{\theta}{4}$の円の弧の一部を描くので，kの増加に対し，$y_A(k)$の減少分が$y_B(k)$の減少分を上回る。すなわち，$L(k)$はkに対して単調増加である。よって$L(k)$の最大値は，

$$y_B\left(\sin\frac{\theta}{2}+\pi-\frac{\theta}{2}\right)-y_A\left(\sin\frac{\theta}{2}+\pi-\frac{\theta}{2}\right)=1$$

であり，これは[1]で求めた$2\cos\frac{\theta}{4}-1$よりも大きい。

以上[1], [2]より，求める最大値は1である。

Ⅲ

(1)

$$f(x)=x^2-4x+3+2\log x$$

より，

$$f'(x)=2x-4+\frac{2}{x}=\frac{2(x-1)^2}{x} \qquad \cdots ①$$

となるから，$f'(a)=0$ となる a の値は 1 である。

(答) $a=1$

(2)

$$f(1)=1^2-4\cdot 1+3+2\log 1=0$$

であるから，①と合わせて，$x\geqq 1$ における $f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	1	$\cdots$
$f'(x)$	0	+
$f(x)$	0	↗

したがって $x>1$ のとき $f(x)>0$ である。

(証明終)

(3)

$$h(x)=g(x)-f(x)$$

とおく。このとき，

$$h'(x)=g'(x)-f'(x)$$

$$=2(x-1)^2-\frac{2(x-1)^2}{x}$$

$$=\frac{2(x-1)^3}{x}$$

$$h(1)=g(1)-f(1)=0$$

となる。よって $h(x)$ の増減表は次のようになる。

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$h'(x)$	／	−	0	+
$h(x)$	／	↘	0	↗

したがって $x>0, x\neq 1$ のとき $h(x)>0$ となる。

(証明終)

(4)

(2), (3)の結果より，$x>1$ で

$$0<f(x)<g(x)$$

であることがわかった。よって，$\log x=\frac{1}{2}\left(f(x)-x^2+4x-3\right)$ について，$x>1$ のとき

$$-\frac{x^2-4x+3}{2}<\log x=\frac{1}{2}\left(f(x)-x^2+4x-3\right)<\frac{g(x)}{2}-\frac{x^2-4x+3}{2} \qquad \cdots ②$$

が成り立つ。ここで $x=1.1$ を②に代入して

(左辺) $\quad -\frac{1.1^2-4\times 1.1+3}{2}=0.095$

(右辺) $\quad \frac{\frac{2}{3}(0.1)^3}{2}-\frac{1.1^2-4\times 1.1+3}{2}=\frac{1}{3}\cdot(0.1)^3+0.095<0.09534$

したがって，$0.095<\log 1.1<0.09534$ が成り立つ。

(答) 0.095

Ⅳ

(1)

$$f(x)=xe^{bx}$$
$$f'(x)=e^{bx}+xbe^{bx}=(bx+1)e^{bx}$$
$$f''(x)=be^{bx}+b(bx+1)e^{bx}=b(bx+2)e^{bx}$$

だから，$y=f(x)$ は

$x=-\dfrac{1}{b}$ で，極小値　$f\left(-\dfrac{1}{b}\right)=-\dfrac{1}{be}$

変曲点は，　$\left(-\dfrac{2}{b},-\dfrac{2}{be^2}\right)$

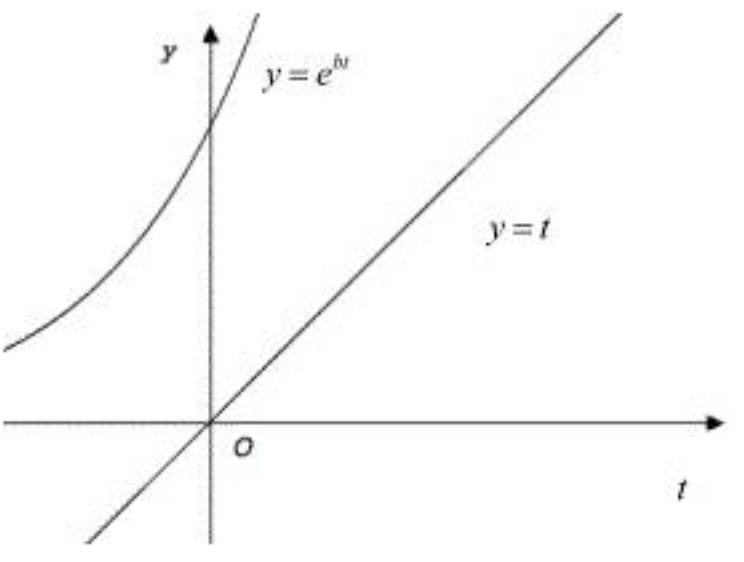
となる。また，$x=-t$ とおくと，

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{t\to\infty}f(-t)=\lim_{t\to\infty}\left(-\frac{t}{e^{bt}}\right)$$

となる。すると右図より，

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{t\to\infty}\left(-\frac{t}{e^{bt}}\right)=-0=0$$

以上より



$x=-\dfrac{1}{b}$ で，極小値　$-\dfrac{1}{be}$

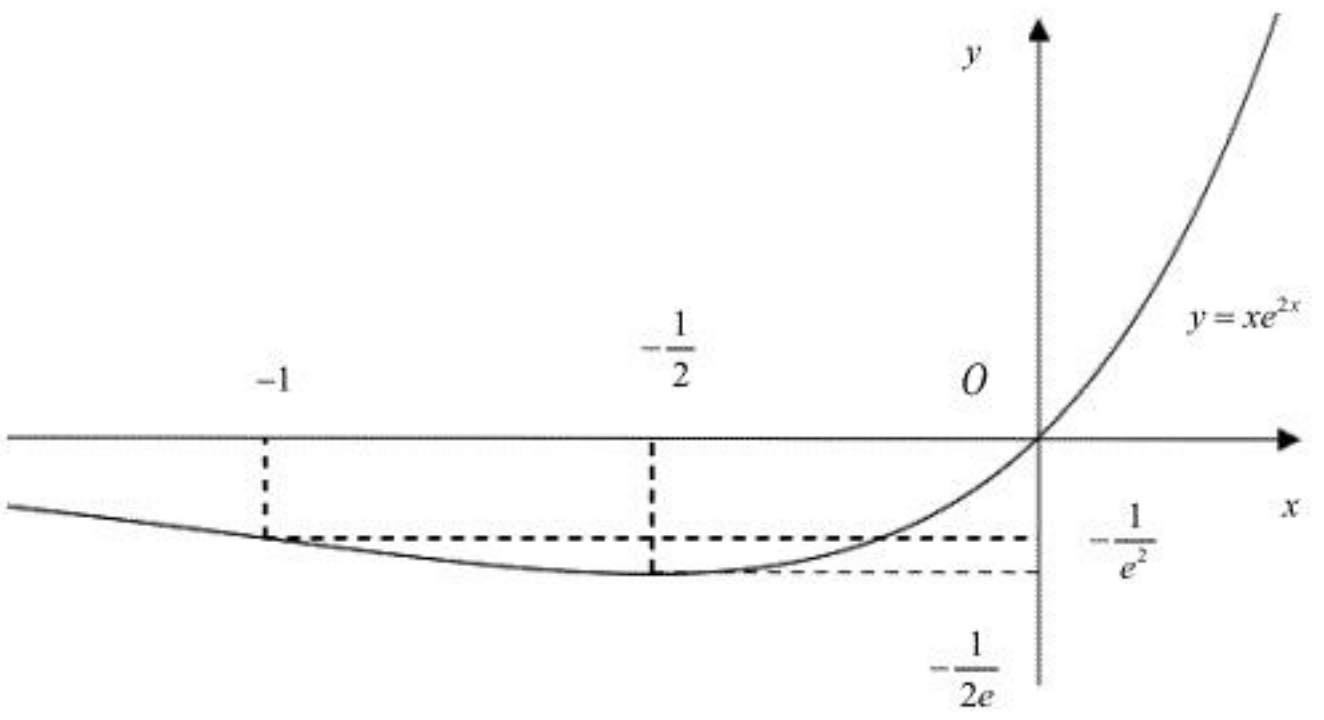
(答)　変曲点　$\left(-\dfrac{2}{b},-\dfrac{2}{be^2}\right)$

$\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$

また，$b=2$ のとき，$f(x)=xe^{2x}$ の増減表を描くと次のようになる。

x	$-\infty$		-1		$-\dfrac{1}{2}$		∞
$f'(x)$		−	−	−	0	+	
$f''(x)$		−	0	+	+	+	
y	0	↘	$-\dfrac{1}{e^2}$	↘	$-\dfrac{1}{2e}$	↗	∞

よって，$f(x)=xe^{2x}$ のグラフの概形は次の通り。



(2)

$$f'(x)=(bx+1)e^{bx}$$
$$f''(x)=b(bx+2)e^{bx}$$
$$f'''(x)=b\left\{be^{bx}+(bx+2)be^{bx}\right\}=b^2(bx+3)e^{bx}$$

であるから，$f^{(n)}(x)=b^{n-1}(bx+n)e^{bx}$ と推測される。以下，数学的帰納法でこれを示す。

［1］ $n=1$ のとき，$f'(x)=(bx+1)e^{bx}$ だから，正しい。

［2］ $n=k$ のときの成立を仮定すると，

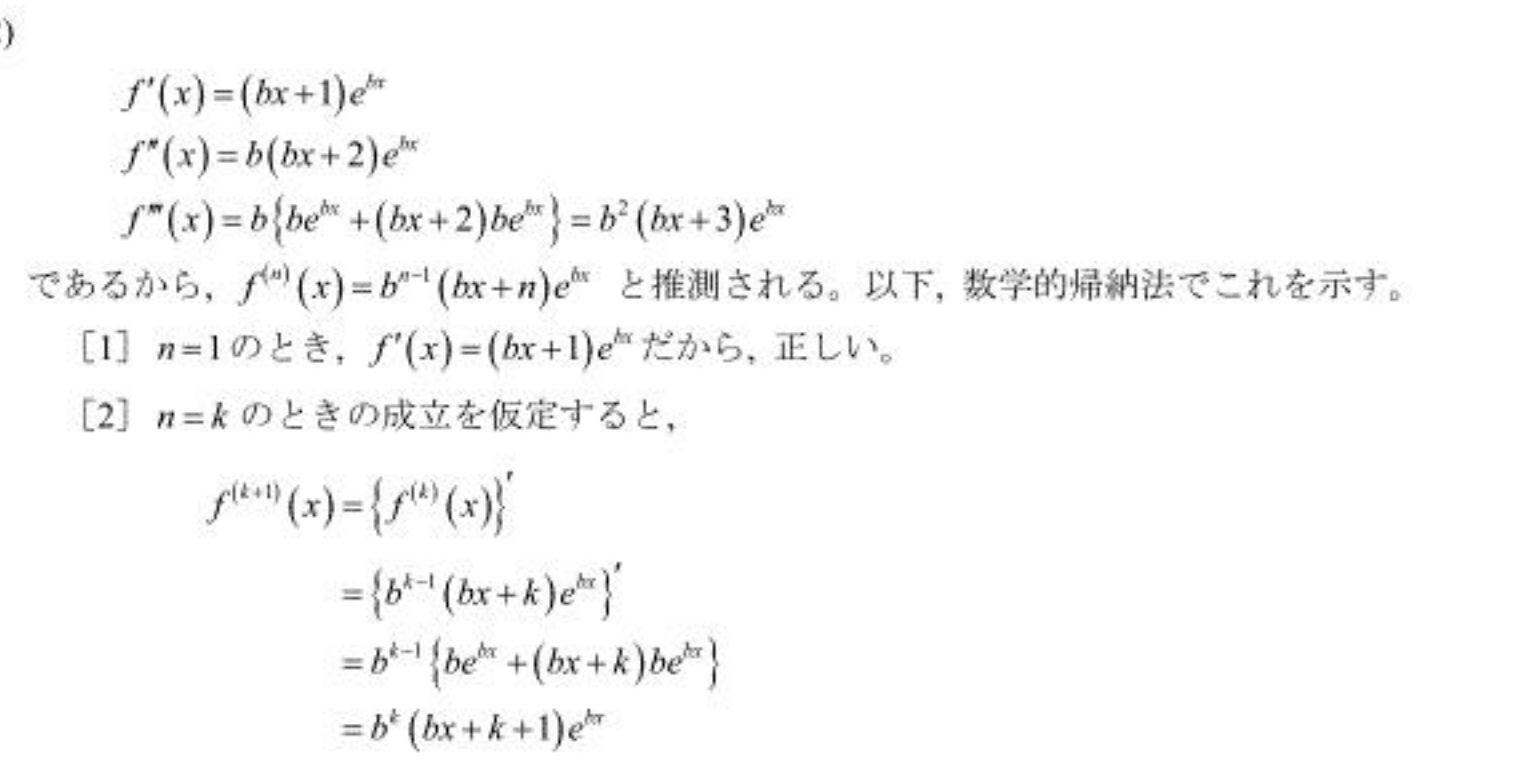
$$f^{(k+1)}(x)=\left\{f^{(k)}(x)\right\}'$$
$$=\left\{b^{k-1}(bx+k)e^{bx}\right\}'$$
$$=b^{k-1}\left\{be^{bx}+(bx+k)be^{bx}\right\}$$
$$=b^k(bx+k+1)e^{bx}$$

となるから，$k+1$ のときも成立する。

以上［1］，［2］より数学的帰納法により示された。　(証明終)

(3)

(2)より，$c_n=-\dfrac{n}{b}$ となる。



求める面積 S_n は，上図の網目部分であるから，部分積分法を用いることで

$$S_n=\int_{c_n}^{0}-f(x)\,dx$$
$$=\int_{c_n}^{0}\left(-xe^{bx}\right)dx$$
$$=\left[-\frac{x}{b}e^{bx}\right]_{c_n}^{0}-\int_{c_n}^{0}\left(-\frac{1}{b}e^{bx}\right)dx$$
$$=\left[-\frac{x}{b}e^{bx}\right]_{c_n}^{0}+\left[\frac{1}{b^2}e^{bx}\right]_{c_n}^{0}$$
$$=\left[(-bx+1)\frac{e^{bx}}{b^2}\right]_{c_n}^{0}$$
$$=\frac{1}{b^2}-(n+1)\frac{e^{-n}}{b^2}\quad\left(\because c_n=-\frac{n}{b}\right)$$
$$=\frac{1}{b^2}\left(1-e^{-n}-ne^{-n}\right)$$

となる。すると，

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{b^2}\left(1-e^{-n}-ne^{-n}\right)$$
$$=\frac{1}{b^2}(1-0-0)$$
$$=\frac{1}{b^2}$$

以上より

(答) $S_n=\dfrac{1}{b^2}\left(1-e^{-n}-ne^{-n}\right)$，$\lim_{n\to\infty}S_n=\dfrac{1}{b^2}$