2010 年度入学試験問題

数　学

（試験時間　15：20〜17：00　　100 分）

1．解答用紙は，記述解答用紙とマーク解答用紙の 2 種類がありますので注意してください。

2．解答は，必ず解答欄に記入してください。なお，解答欄以外に書くと無効となりますので注意してください。

3．解答は，ＨＢの鉛筆またはシャープペンシルを使用し，訂正する場合は，プラスチック製の消しゴムを使用してください。特に，マーク解答用紙には鉛筆のあとや消しくずを残さないでください。また，折りまげたり，汚したりしないでください。記述解答用紙の下敷きにマーク解答用紙を使用することは絶対にさけてください。

4．解答用紙には，受験番号と氏名を必ず記入してください。

5．マーク解答用紙の受験番号および受験番号のマーク記入は，電算処理上非常に重要なので，誤記のないよう特に注意してください。

6．設問文にある点数は，満点が 100 点となるような配点表示になっていますが，数学科の配点は 200 点となります。

I　次の問題文の空欄にもっとも適する答えを解答群から選び，その記号をマーク解答用紙にマークせよ。ただし，同じ記号を２度以上用いてもよい。(20点)

空間内の４点A，B，C，Dを頂点とする正四面体の重心Gは，点Oを基準とする位置ベクトルを使って

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}} + \overrightarrow{\mathrm{OD}}}{4}$$

と表され，$\overrightarrow{\mathrm{GA}} + \overrightarrow{\mathrm{GB}} + \overrightarrow{\mathrm{GC}} + \overrightarrow{\mathrm{GD}} = \boxed{\quad ア \quad}$ となることがわかる。また正四面体の対称性から $|\overrightarrow{\mathrm{GA}}| = |\overrightarrow{\mathrm{GB}}| = |\overrightarrow{\mathrm{GC}}| = |\overrightarrow{\mathrm{GD}}|$ であり，また $\overrightarrow{\mathrm{GA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{GB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{GC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{GD}}$ のうち２つの異なるベクトルのなす角はどれも等しい。この角度を θ とする。$\overrightarrow{\mathrm{GA}}$ は面BCDに直交し，他のベクトルと面も同様であるから，この正四面体の２つの面のなす角（これを面角という）ω と θ は $\theta = \boxed{\quad イ \quad}$ をみたす。そこで，内積 $\overrightarrow{\mathrm{GA}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{GA}} + \overrightarrow{\mathrm{GB}} + \overrightarrow{\mathrm{GC}} + \overrightarrow{\mathrm{GD}})$ を計算すれば $\cos\theta = \boxed{\quad ウ \quad}$ と $\cos\omega = \boxed{\quad エ \quad}$ を得る。

一方，この正四面体の６本の各辺の中点を頂点として正八面体が作れる。よって正四面体の面角 ω と正八面体の面角 φ は $\varphi = \boxed{\quad オ \quad}$ の関係にあり，$\cos\varphi = \boxed{\quad カ \quad}$ となる。この正八面体の１辺の長さと正四面体ABCDの１辺の長さの比は $\boxed{\quad キ \quad}$ である。これより，１辺の長さの等しい正四面体と正八面体の体積の比は $\boxed{\quad ク \quad}$ となる。

問題Ⅰのアの解答群

ⓐ $\overrightarrow{OG}$　ⓑ $-\overrightarrow{OG}$　ⓒ $2\overrightarrow{OG}$　ⓓ $-2\overrightarrow{OG}$　ⓔ $3\overrightarrow{OG}$　ⓕ $-3\overrightarrow{OG}$

ⓖ $\frac{1}{2}\overrightarrow{OG}$　ⓗ $-\frac{1}{2}\overrightarrow{OG}$　ⓘ $\frac{1}{4}\overrightarrow{OG}$　ⓙ $-\frac{1}{4}\overrightarrow{OG}$　ⓚ $\vec{0}$

問題Ⅰのイ，オの解答群

ⓐ ω　ⓑ $-\omega$　ⓒ $\frac{\pi}{2}+\omega$　ⓓ $\frac{\pi}{2}-\omega$　ⓔ $\frac{\pi}{2}+\frac{\omega}{2}$

ⓕ $\frac{\pi}{2}-\frac{\omega}{2}$　ⓖ $\pi+\omega$　ⓗ $\pi-\omega$　ⓘ $\pi+\frac{\omega}{2}$　ⓙ $\pi-\frac{\omega}{2}$

問題Ⅰのウ，エ，カの解答群

ⓐ 0　ⓑ 1　ⓒ -1　ⓓ $\frac{1}{2}$　ⓔ $-\frac{1}{2}$　ⓕ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

ⓖ $-\frac{\sqrt{2}}{2}$　ⓗ $\frac{\sqrt{3}}{2}$　ⓘ $-\frac{\sqrt{3}}{2}$　ⓙ $\frac{1}{3}$　ⓚ $-\frac{1}{3}$　ⓛ $\frac{2}{3}$

ⓜ $-\frac{2}{3}$　ⓝ $\frac{\sqrt{3}}{3}$　ⓞ $-\frac{\sqrt{3}}{3}$　ⓟ $\frac{1}{4}$　ⓠ $-\frac{1}{4}$　ⓡ $\frac{\sqrt{3}}{4}$

ⓢ $-\frac{\sqrt{3}}{4}$

問題Ⅰのキ，クの解答群

ⓐ $1:2$　ⓑ $2:1$　ⓒ $1:\sqrt{2}$　ⓓ $\sqrt{2}:1$　ⓔ $1:\sqrt{3}$　ⓕ $\sqrt{3}:1$

ⓖ $1:3$　ⓗ $3:1$　ⓘ $1:4$　ⓙ $4:1$　ⓚ $1:8$　ⓛ $8:1$

（設問は次ページに続く。）

II　次の問題文の空欄にもっとも適する答えを解答群から選び，その記号をマーク解答用紙にマークせよ。ただし，同じ記号を2度以上用いてもよい。(20点)

中心A，半径1の円板の周上に2点R，Sをとり，中心角∠RASをθとする($0 < \theta < \pi$)。円板を弦RSで2つに切り離したとき，中心Aを含む図形をDとおく(図1)。Dの弧RS上に点Bを$\overset{\frown}{\mathrm{RB}} = \overset{\frown}{\mathrm{SB}}$となるようにとる。

xy平面の$y \geqq 0$の領域に，図形Dを点Bが原点に位置するように置く（図2の左端)。さてこのDを，x軸に接したまま滑らないように転がして，Dが1回転したときの点Bの座標を$(b, 0)$とする($b > 0$)。ただし，点Sがx軸に達した時点でSを支点として弦RSがx軸に重なるまでDを回転させ，引き続き点Rから転がしていくものとする。このとき中心Aの描く曲線をC_1とし，点Bの描く曲線をC_2とする。

曲線C_1の長さは $\boxed{\text{ケ}}$ であり，C_1，x軸，y軸と直線$x = b$とで囲まれる領域の面積は $\boxed{\text{コ}}$ $+$(Dの面積)である。

次に，C_1とC_2の交点を$\mathrm{E}_1(x_1, 1)$，$\mathrm{E}_2(x_2, 1)$ $(x_1 < x_2)$とし，C_1とC_2とで囲まれる領域をFとする。このとき，$x_1 =$ $\boxed{\text{サ}}$ である。また，F内の点のy座標の最大値は $\boxed{\text{シ}}$ であり，直線$x = k$とFとの交わりの線分の長さは，kが$x_1 < k < x_2$を動くとき，最大値 $\boxed{\text{ス}}$ をとる。

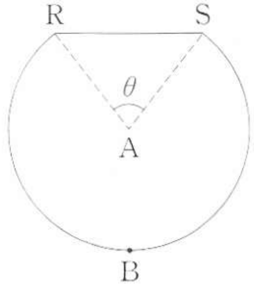

図1：図形D

問題IIのケ，コの解答群

ⓐ $\dfrac{\pi}{2}$　ⓑ π　ⓒ $\dfrac{3\pi}{2}$　ⓓ 2π　ⓔ $\pi+\dfrac{\theta}{2}$

ⓕ $\pi-\dfrac{\theta}{2}$　ⓖ $\pi+\theta$　ⓗ $\pi-\theta$　ⓘ $2\pi+\theta$　ⓙ $2\pi-\theta$

ⓚ $2\pi+2\theta$　ⓛ $2\pi-2\theta$　ⓜ $\dfrac{\pi}{2}+\theta$　ⓝ $\dfrac{3\pi}{2}-\theta$　ⓞ $\pi+\dfrac{1}{2}\sin\theta$

ⓟ $\pi-\dfrac{1}{2}\sin\theta$　ⓠ $\pi+\dfrac{1}{2}\cos\theta$　ⓡ $\pi-\dfrac{1}{2}\cos\theta$

問題IIのサの解答群

ⓐ $\dfrac{\pi}{4}$　ⓑ $\dfrac{\pi}{2}$　ⓒ π　ⓓ $\pi+1$　ⓔ $\pi-1$

ⓕ $\dfrac{\pi}{2}+1$　ⓖ $\dfrac{\pi}{2}-1$　ⓗ $\dfrac{\pi}{4}+1$　ⓘ $\dfrac{\pi}{4}-1$

問題IIのシの解答群

ⓐ $\sin\dfrac{\theta}{4}$　ⓑ $\cos\dfrac{\theta}{4}$　ⓒ $2\sin\dfrac{\theta}{4}$　ⓓ $2\cos\dfrac{\theta}{4}$　ⓔ $\sin\dfrac{\theta}{2}$

ⓕ $\cos\dfrac{\theta}{2}$　ⓖ $2\sin\dfrac{\theta}{2}$　ⓗ $2\cos\dfrac{\theta}{2}$　ⓘ $1+\cos\dfrac{\theta}{2}$

問題IIのスの解答群

ⓐ 1　ⓑ $\sin\theta$　ⓒ $\cos\theta$　ⓓ $\cos\dfrac{\theta}{2}$

ⓔ $2\sin\dfrac{\theta}{4}-1$　ⓕ $2\cos\dfrac{\theta}{4}-1$

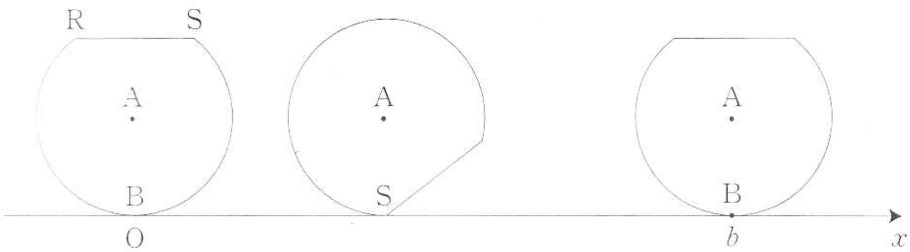

図 2

（設問は次ページに続く。）

III　関数 $f(x)=x^2-4x+3+2\log x\ (x>0)$ に対し，$f'(x)=0$ となる x の値を a とする。以下のように $f(x)$ が $x=a$ の近くで 0 に非常に近くなることを示し，対数の値を近似計算する。(30 点)

(1)　a の値を求めよ。

(2)　$x>a$ のとき $f(x)>0$ を示せ。

(3)　$g(x)=\dfrac{2}{3}(x-a)^3$ とする。$x>0$，$x\neq a$ のとき $f(x)<g(x)$ を示せ。

(4)　$\log(a+0.1)$ の数値を小数第 3 位まで求めよ。

(設問は次ページに続く。)

IV　定数 $b>0$ に対して $f(x)=xe^{bx}$ とおく。関数 $y=f(x)$ とそのグラフについて，以下の問い に答えよ。(30 点)

(1)　関数 $y=f(x)$ の極値，グラフの変曲点，および極限値 $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ を求めよ。また，$b=2$ のときのグラフの概形を描け。

(2)　$f'(x)$，$f''(x)$，$f'''(x)$ を計算して一般の n について第 n 次導関数 $f^{(n)}(x)$ の形を推測し，それを数学的帰納法によって証明せよ。

(3)　$f^{(n)}(x)=0$ となる x の値を c_n とおき，x 軸，$y=f(x)$ のグラフ，および直線 $x=c_n$ によって囲まれる領域の面積を S_n とする。S_n および極限値 $\lim_{n\to\infty} S_n$ を求めよ。

（以下計算用紙）