I

(1)	4通り	(2)	655	(3)	$y=x^2+3x-2$
(4)	$8\pi(2t+1)^2$	(5)	2.5	(6)	$\dfrac{5}{16}$

【解説】

(1)

100を素因数分解すると,

$$100=2^2\cdot 5^2$$

である。したがって,$x>y$となる自然数$(x,\ y)$の組み合わせは,

$$(x,\ y)=(100,1),\ (50,2),(25,4),\ (20,5)$$

の4通りである。

(2)

和の公式を用いると,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{10}(2k^2-3k+5)&=2\cdot\frac{1}{6}\cdot 10(10+1)(2\cdot 10+1)-\frac{3}{2}\cdot 10(10+1)+5\cdot 10\\&=\frac{1}{3}\cdot 10\cdot 11\cdot 21-\frac{3}{2}\cdot 10\cdot 11+50\\&=770-165+50\\&=655\end{aligned}$$

となる。

(3)

$y=x^2-2kx+2k^2+3k-2$を変形すると,

$$y=(x-k)^2+k^2+3k-2$$

となるので,この放物線の頂点の座標は$(k,\ k^2+3k-2)$である。

したがって,この放物線の頂点の軌跡は,

$$\begin{cases}x=k\\y=k^2+3k-2\end{cases}\Leftrightarrow\quad y=x^2+3x-2$$

となる。

(4)

半径rの球の体積Vは,

$$V=\frac{4}{3}\pi r^3$$

である。上式に$r=2t+1$を代入すると,

$$V(t)=\frac{4}{3}\pi(2t+1)^3$$

となるので,両辺をtで微分して,

$$V'(t)=\frac{4}{3}\pi\cdot 6(2t+1)^2=8\pi(2t+1)^2$$

と求まる。

(5)

$$\begin{aligned}\log_{10}x^2y^3&=\log_{10}x^2+\log_{10}y^3\\&=2\log_{10}x+3\log_{10}y\\&=2\cdot 0.8+3\cdot 0.3\\&=2.5\end{aligned}$$

と求まる。

(6)

表が出る確率と裏が出る確率はともに$\dfrac{1}{2}$である。5回のうち表が出る3回を選べば良いから,

求める確率は,

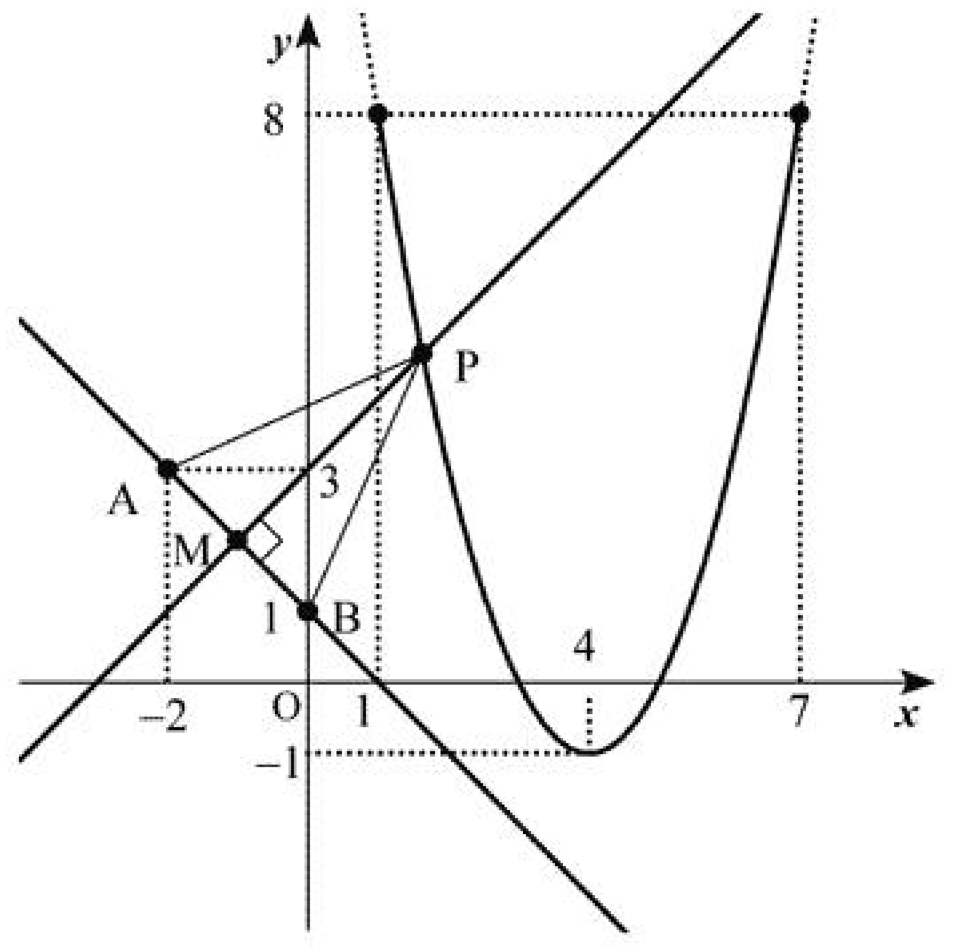
$${}_5\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2=10\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{5}{16}$$

となる。

Ⅱ

(1)

次図のように，ABの垂直二等分線上に点Pがあるときに，△PABはPA = PBの二等辺三角形となる。



ABの中点をMとすると，

$$\mathrm{M}(-1,\ 2)$$

である。また，直線ABの傾きは，

$$\frac{1-3}{0+2}=-1$$

であるから，ABの垂直二等分線の傾きは1である。

したがって，ABの垂直二等分線の方程式は，

$$y=1\cdot(x+1)+2=x+3$$

と求まる。上式と放物線の交点のうち $1 \leqq x \leqq 7$ を満たす解が求める点Pの x 座標である。

$$x+3=x^2-8x+15$$
$$\Leftrightarrow x^2-9x+12=0$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{9\pm\sqrt{81-48}}{2}=\frac{9\pm\sqrt{33}}{2}$$

ここで，$5<\sqrt{33}<6$ であるから

$$x=\frac{9-\sqrt{33}}{2}$$

が $1 \leqq x \leqq 7$ を満たす。これを $y=x+3$ に代入すると，

$$y=\frac{15-\sqrt{33}}{2}$$

となる。以上より，求める点Pの座標は，

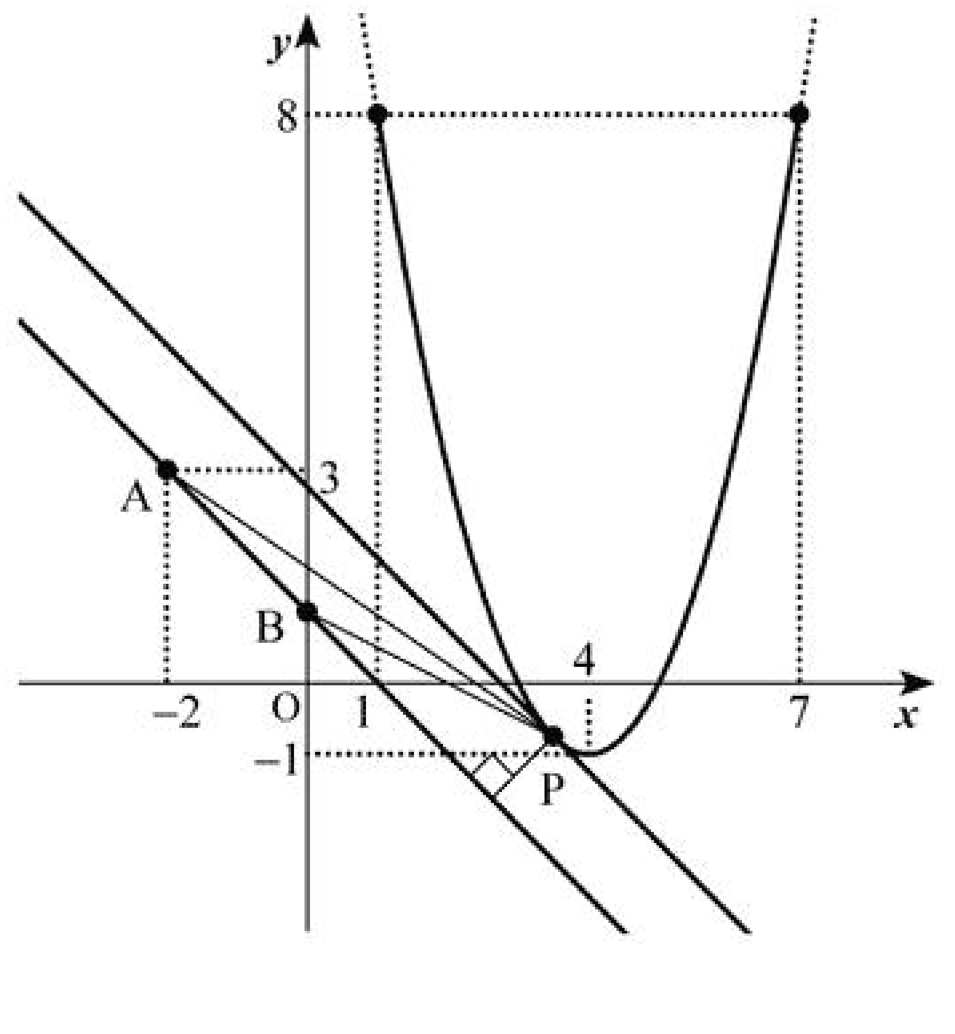
$$\mathrm{P}\left(\frac{9-\sqrt{33}}{2},\ \frac{15-\sqrt{33}}{2}\right)$$

である。

(答) $\mathrm{P}\left(\frac{9-\sqrt{33}}{2},\ \frac{15-\sqrt{33}}{2}\right)$

(2)

△PABについて，辺ABを底辺と見たとき直線ABと点Pとの距離が高さとなるので，この高さを h とおく。辺ABの長さは一定であるから，△PABの面積が最小となるのは，h が最小となるときである。h が最小となるのは，次図のように，点Pにおける放物線の接線が直線ABと平行となるときである。



放物線上の点 $(t,\ t^2-8t+15)$ における接線の傾きは $2t-8$ であるから，接線が直線ABと平行となる条件は，直線ABの傾きが -1 であることに注意すると，

$$2t-8=-1 \Leftrightarrow t=\frac{7}{2}$$

である。これが求める点Pの x 座標である。さらに，点Pの y 座標は

$$t^2-8t+15=\frac{49}{4}-28+15=-\frac{3}{4}$$

となる。よって，求める点Pの座標は，

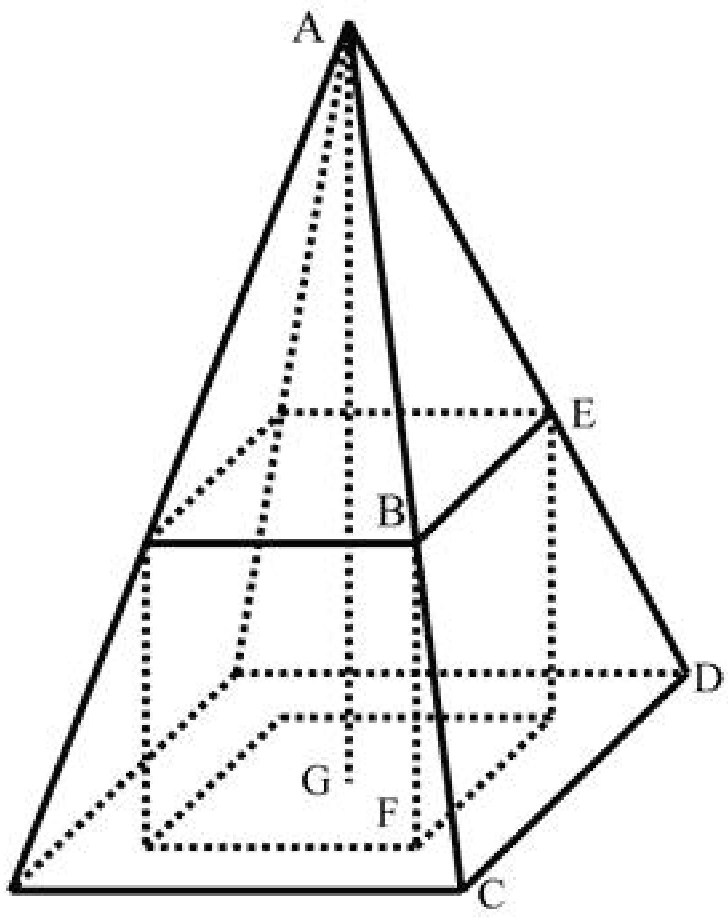
$$\mathrm{P}\left(\frac{7}{2},\ -\frac{3}{4}\right)$$

である。

(答) $\mathrm{P}\left(\frac{7}{2},\ -\frac{3}{4}\right)$

Ⅲ

(1)



図のように，各点に記号をつける。正四角柱の高さを t とおくと

$$t : h = \mathrm{BF} : \mathrm{AG}$$
$$= \mathrm{BC} : \mathrm{AC} \qquad \cdots①$$

となる。ここで

$$\mathrm{AB} : \mathrm{AC} = \mathrm{BE} : \mathrm{CD}$$
$$= x : a$$

であり，これと $\mathrm{BC} = \mathrm{AC} - \mathrm{AB}$ より，

$$\mathrm{BC} : \mathrm{AC} = a - x : a \qquad \cdots②$$

となる。①，②より

$$t : h = a - x : a$$
$$\Leftrightarrow at = h(a - x)$$
$$\Leftrightarrow t = \frac{h}{a}(a - x)$$

となる。したがって，求める体積を $V(x)$ とおくと

$$V(x) = x^2 t$$
$$= \frac{h}{a}x^2(a - x)$$

となる。

(答) $\frac{h}{a}x^2(a - x)$

(2)

$$V(x) = \frac{h}{a}x^2(a - x)$$
$$= -\frac{h}{a}x^3 + hx^2$$

であるから，

$$V'(x) = -\frac{3h}{a}x^2 + 2hx$$
$$= -\frac{3h}{a}x\left(x - \frac{2a}{3}\right)$$

となる。$0 < x < a$ に注意して増減表を書くと，次のようになる。

x	0	$\cdots$	$\frac{2a}{3}$	$\cdots$	a
$V'(x)$		$+$	0	$-$	
$V(x)$		↗	極大	↘	

増減表より，$V(x)$ は $x = \frac{2a}{3}$ で最大値をとることが分かる。また，最大値は，

$$V\left(\frac{2a}{3}\right) = \frac{h}{a}\left(\frac{2a}{3}\right)^2\left(a - \frac{2a}{3}\right)$$
$$= \frac{4a^2h}{27}$$

である。

(答) $x = \frac{2a}{3}$，体積 $\frac{4a^2h}{27}$