

I

問 1

$$\frac{2n}{3} = \frac{n}{m} + 1 \quad \cdots \textcircled{1}$$

n は m の倍数であるから、 k を自然数とすると、

$$n = km \quad \cdots \textcircled{2}$$

とおくことができる。これを①に代入すると、

$$\frac{2mk}{3} = \frac{mk}{m} + 1$$

$$\Leftrightarrow 2mk = 3k + 3$$

$$\Leftrightarrow (2m-3)k = 3 \quad \cdots \textcircled{3}$$

と変形できる。したがって $2m-3$, k は整数であるから、 k は 1 か 3 である。

[1] $k=1$ のとき

③より、

$$2m-3=3$$

$$\Leftrightarrow m=3$$

となるので、②より、 $n=3$ と求まる。したがって、 n を 3 で割ると余りは 0 である。

[2] $k=3$ のとき

③より、

$$2m-3=1$$

$$\Leftrightarrow m=2$$

となるので、②より、 $n=6$ と求まる。したがって、 n を 3 で割ると余りは 0 である。

[1], [2]より、いずれの場合も n を 3 で割ると余りは 0 である。

(答) 0

問 2

問 1 より、 $(m, n) = (3, 3), (2, 6)$ である。

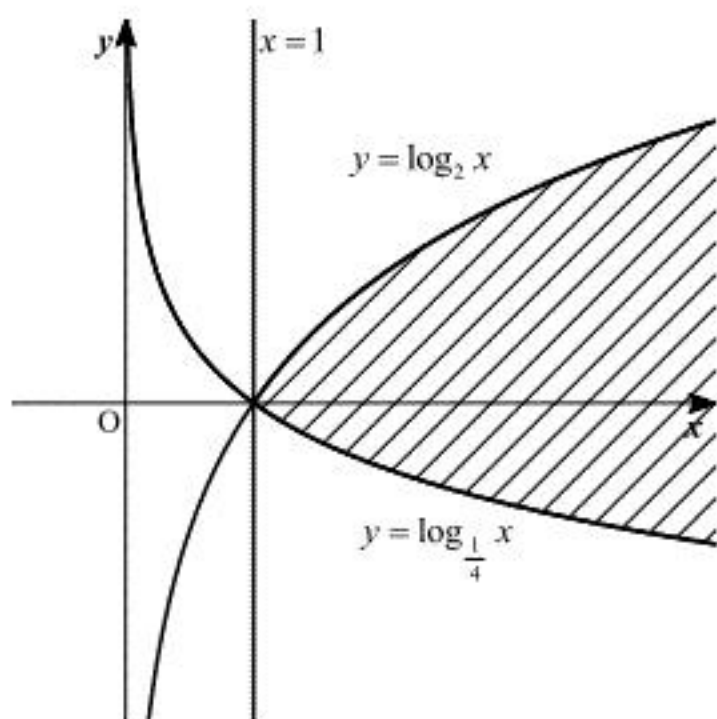
(答) $(m, n) = (3, 3), (2, 6)$

Ⅱ

問 1

$$g(x) = \log_{\frac{1}{4}} x = \frac{\log_2 x}{\log_2 \frac{1}{4}} = -\frac{1}{2} \log_2 x$$

である。よって、領域 D は次図のとおりである(ただし境界線を含む)。



(答) 前図

問 2

x 以下の整数で最も大きい数を $[x]$ で表す。このとき、 $[f(x)]$ の値を考えると、

$2^k \leq x \leq 2^{k+1} - 1$ のとき、 $[f(x)] = k$ である。したがって、「 D に属する格子点 $P(x, y)$ で

$x \leq 8$, $y \geq 1$ であるもの」の総数は、

$$\sum_{k=1}^8 [f(x)] = 0 + 1 + 1 + 2 + 2 + 2 + 2 + 3 = 13 \text{ (個)}$$

となる。次に「 D に属する格子点 $P(x, y)$ で $x \leq 8$, $y = 0$ であるもの」の総数は、

$$8 - 1 + 1 = 8 \text{ (個)}$$

となる。同様にして、 $[|g(x)|]$ の値を考えると、 $4^k \leq x \leq 4^{k+1} - 1$ のとき、

$$[|g(x)|] = k$$

である。したがって、「 D に属する格子点 $P(x, y)$ で $x \leq 8$, $y \leq -1$ であるもの」の総数は、

$$\sum_{k=1}^8 [|g(x)|] = 0 + 0 + 0 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5$$

となる。以上より、「 D に属する格子点 $P(x, y)$ で $x \leq 8$ であるもの」の総数は、

$$13 + 8 + 5 = 26 \text{ (個)}$$

である。

(答) 26 個

問 2

問 1 と同様にして、 $2^k \leq x \leq 2^{k+1} - 1$ のとき、 $[f(x)] = k$ であるから、「 D に属する格子点

$P(x, y)$ で $x \leq 33$, $y \geq 1$ であるもの」の総数は、 $33 = 2^5 + 1$ であることに注意して、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{33} [f(x)] &= [f(1)] + \sum_{k=2}^3 [f(k)] + \sum_{k=3}^7 [f(k)] + \sum_{k=8}^{15} [f(k)] + \sum_{k=16}^{31} [f(k)] + \sum_{k=32}^{33} [f(k)] \\ &= 0 + 2 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 8 \cdot 3 + 16 \cdot 4 + 2 \cdot 5 \\ &= 108 \text{ (個)} \end{aligned}$$

となる。

(答) 108 個

Ⅲ

問 1

まず,

$$f(0)=a \Leftrightarrow c_0=a$$

である。また,

$$f'(x)=3c_3x^2+2c_2x+c_1$$

であるから,

$$f'(0)=1 \Leftrightarrow c_1=1$$

である。したがって,

$$f(x)=c_3x^3+c_2x^2+x+a$$

と書ける。このもとで,

$$f(1)=b \Leftrightarrow c_3+c_2+1+a=b \quad \cdots \textcircled{1}$$

であり, また,

$$f(-1)=1 \Leftrightarrow -c_3+c_2-1+a=1 \quad \cdots \textcircled{2}$$

である。①, ②を連立して c_2, c_3 について解くと,

$$c_2=\frac{1}{2}(1-2a+b), c_3=\frac{1}{2}(-3+b)$$

となる。以上より, $f(x)$ を a, b を用いて表すと,

$$f(x)=\frac{1}{2}(-3+b)x^3+\frac{1}{2}(1-2a+b)x^2+x+a$$

となる。

$$(\text{答}) \quad f(x)=\frac{1}{2}(-3+b)x^3+\frac{1}{2}(1-2a+b)x^2+x+a$$

問 2

問 1 の結果から,

$$g(x)=\frac{1}{2}(1-2a+b)x^2+x+a$$

と書ける。したがって,

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^1 g(x) dx \\ &= 2 \int_0^1 \left\{ \frac{1}{2}(1-2a+b)x^2 + a \right\} dx \\ &= \left[\frac{1}{3}(1-2a+b)x^3 + 2ax \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{3}(1+4a+b) \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad S = \frac{1}{3}(1+4a+b)$$

問 3

まず, b を固定して考える。

$$S = \frac{1}{3}(1+4a+b)$$

であるから, a が最大値をとるとき, S も最大値をとる。ここで,

$$a \geq 0, \quad b \geq 0, \quad a+b \leq 1$$

であるから,

$$0 \leq b \leq 1 \text{ の条件のもと, } a=1-b$$

のとき, S は最大値

$$S = \frac{1}{3}\{1+4(1-b)+b\} = \frac{5}{3}-b$$

をとる。次に, b を固定せずに考える。前式より, b が最小値をとるとき, S は最大値をとる。

したがって, $b=0$ のとき, S は最大値 $S=\frac{5}{3}$ をとる。

$$(\text{答}) \quad \frac{5}{3}$$

IV

問 1

1 回サイコロを投げて退場になる確率は、 $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ であり、残る確率は $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ である。

$X(1)=0$ となる確率は、

$$\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$$

である。 $X(1) \geq 1$ となる場合は、 $X(1)=0$ となる場合の余事象であるので、 $X(1) \geq 1$ となる確率は、

$$1 - \frac{1}{27} = \frac{26}{27}$$

である。

(答) $\frac{26}{27}$

問 2

[1] $X(1)=0$ となるとき

この確率は、問 1 より、

$$\frac{1}{27}$$

である。

[2] $X(1)=1$ となるとき

この確率は、どの人が退場するかということを考慮して、

$${}_3C_2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{6}{27}$$

である。

[3] $X(1)=2$ となるとき

この確率は、同様に、どの人が退場するかということを考慮して、

$${}_3C_1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{12}{27}$$

である。

[4] $X(1)=3$ となるとき

この確率は、

$$\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$$

である。

以上[1]～[4]より、 $X(1)$ の期待値は、

$$0 \cdot \frac{1}{27} + 1 \cdot \frac{6}{27} + 2 \cdot \frac{12}{27} + 3 \cdot \frac{8}{27} = 2$$

である。

(答) 2

問 3

$X(2)=0$ となる確率を考える。

[1] $X(1)=0$ かつ $X(2)=0$ となるとき

この確率は、問 2 より、

$$\frac{1}{27}$$

となる。

[2] $X(1)=1$ かつ $X(2)=0$ となるとき

この確率は、問 2 より、

$$\frac{6}{27} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{27}$$

となる。

[3] $X(1)=2$ かつ $X(2)=0$ となるとき

この確率は、問 2 より、

$$\frac{12}{27} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{4}{81}$$

となる。

[4] $X(1)=3$ かつ $X(2)=0$ となるとき

このようになる確率は、問 2 より、

$$\frac{8}{27} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{8}{729}$$

となる。

以上[1]～[4]より、 $X(2)=0$ となる確率は、

$$\frac{1}{27} + \frac{2}{27} + \frac{4}{81} + \frac{8}{729} = \frac{125}{729}$$

となる。ここで、 $X(2) \geq 1$ となる場合は、 $X(2)=0$ となる場合の余事象であるので、

$X(2) \geq 1$ となる確率は、

$$1 - \frac{125}{729} = \frac{604}{729}$$

である。

(答) $\frac{604}{729}$