I

問 1

$$x_k - 2 = X_k \qquad (k = 1, 2, 3, 4)$$

とおくと，求める場合の数は

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 6,\ X_k \geqq 0\ (k = 1, 2, 3, 4)$$

を満たす整数(X_1, X_2, X_3, X_4)の組の総数となる。このような組の総数は, 6 個の○と 3 個の｜を横一列に並べる順列の総数に等しい。なぜならば，｜で区切られた内にある○の数を左からX_1, X_2, X_3, X_4とすれば，条件を満たす(X_1, X_2, X_3, X_4)の組と順列が 1 対 1 に対応するからである。よって，求める総数は

$$\frac{(6+3)!}{3!6!} = 84$$

となる。

(答) 84

問 2

問 1 と同様に考えれば，$(y_1, \cdots, y_5)$の組合せの総数は

$$\frac{(4+7)!}{7!4!} = 330$$

となる。

(答) 330

Ⅱ

問 1

k を正の整数とする。

[1] $n=4k$ と表せるとき

$$a_n=2k\pi-\frac{\pi}{3}$$

になるので

$$b_n=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

となる。

[2] $n=4k-1$ と表せるとき

$$a_n=2k\pi-\frac{5}{6}\pi$$

になるので

$$b_n=-\frac{1}{2}$$

となる。

[3] $n=4k-2$ と表せるとき

$$a_n=2k\pi-\frac{4}{3}\pi$$

になるので

$$b_n=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

となる。

[4] $n=4k-3$ と表せるとき

$$a_n=2k\pi-\frac{11}{6}\pi$$

になるので

$$b_n=\frac{1}{2}$$

となる。

以上より

$$b_{12}=-\frac{\sqrt{3}}{2},\ b_{18}=\frac{\sqrt{3}}{2},\ b_{23}=-\frac{1}{2}$$

となる。

(答) $b_{12}=-\frac{\sqrt{3}}{2},\ b_{18}=\frac{\sqrt{3}}{2},\ b_{23}=-\frac{1}{2}$

問 2

問 1 より b_n の周期は 4 なので

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{50} b_n &= 12\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\right)+b_{49}+b_{50}\\ &=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\\ &=\frac{1+\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$

III

問 1

$0<a<1$ のとき, $0 \leqq x \leqq 1$ において $-1<ax-1<0$ なので, $|ax-1|=1-ax$ である。よって,

$$
\begin{aligned}
S &= \int_0^1 f(x)\,dx \\
&= \int_0^1 \left|(1-ax)-b\right| dx \\
&= \int_0^1 \{b-(1-ax)\}\,dx \qquad (\because b>1>1-ax) \\
&= \left[(b-1)x+\frac{1}{2}ax^2\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{2}a+b-1
\end{aligned}
$$

となる。

(答) $\frac{1}{2}a+b-1$

問 2

$1 \leqq a < b+1$ のとき,

$0 \leqq x \leqq \frac{1}{a}$ のとき $|ax-1|=1-ax$

$\frac{1}{a} \leqq x \leqq 1$ のとき $|ax-1|=ax-1$

であり

$|ax-1|<b$

であるので

$$
\begin{aligned}
S &= \int_0^{\frac{1}{a}} |1-ax-b|\,dx + \int_{\frac{1}{a}}^1 |ax-1-b|\,dx \\
&= \int_0^{\frac{1}{a}} (b+ax-1)\,dx + \int_{\frac{1}{a}}^1 (b+1-ax)\,dx \\
&= b+\left[\frac{1}{2}ax^2-x\right]_0^{\frac{1}{a}}+\left[x-\frac{1}{2}ax^2\right]_{\frac{1}{a}}^1 \\
&= b-\frac{1}{2}a-\frac{1}{a}+1
\end{aligned}
$$

となる。

(答) $b-\frac{1}{2}a-\frac{1}{a}+1$

問 3

$a \geqq b+1(>2)$ のとき,

$0 \leqq x \leqq \frac{1}{a}$ のとき, $\left||ax-1|-b\right|=ax+b-1$

$\frac{1}{a} \leqq x \leqq \frac{b+1}{a}$ のとき, $\left||ax-1|-b\right|=-ax+b+1$

$\frac{b+1}{a} \leqq x \leqq 1$ のとき, $\left||ax-1|-b\right|=ax-b-1$

であるので

$$
\begin{aligned}
S &= \int_0^{\frac{1}{a}} (ax+b-1)\,dx + \int_{\frac{1}{a}}^{\frac{b+1}{a}} (-ax+b+1)\,dx + \int_{\frac{b+1}{a}}^1 (ax-b-1)\,dx \\
&= \left[\frac{1}{2}ax^2+(b-1)x\right]_0^{\frac{1}{a}} + \left[-\frac{1}{2}ax^2+(b+1)x\right]_{\frac{1}{a}}^{\frac{b+1}{a}} + \left[\frac{1}{2}ax^2-(b+1)x\right]_{\frac{b+1}{a}}^1 \\
&= \frac{b(b+2)}{a}+\frac{a}{2}-b-1
\end{aligned}
$$

となる。

(答) $\frac{b(b+2)}{a}+\frac{a}{2}-b-1$

IV

問 1

3 回で移動したあとの座標が 1 になればいいので，動き方の組合せは $(0,0,1)$ か $(-1,1,1)$ である。

よって求める確率は

$$3\times\left(\frac{1}{4}\right)^2\times\frac{1}{4}+3\times\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{9}{64}$$

となる。

(答) $\frac{9}{64}$

問 2

問 1 と同様に考えて，取り得る動き方の組合せは $(0,0,0,1)$,$(0,-1,1,1)$ であるから，求める確率は

$$4\times\left(\frac{1}{4}\right)^3\times\frac{1}{4}+\frac{4!}{2!}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{7}{64}$$

となる。

(答) $\frac{7}{64}$

問 3

問 1 と同様に考えて，取り得る動き方の組合せは $(0,0,0,0)$,$(0,0,1,-1)$,$(1,1,-1,-1)$ の 3 つであるから，求める確率は

$$\left(\frac{1}{4}\right)^4+\frac{4!}{2!}\times\left(\frac{1}{4}\right)^2\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}+\frac{4!}{2!2!}\times\left(\frac{1}{4}\right)^2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{49}{256}$$

となる。

(答) $\frac{49}{256}$