

I

ア ㊦ イ ㊧ ウ ㊨ エ ㊩ オ ㊪ カ ㊫

[解説]

ア

自然数 m, n に対し, $1, 2, \dots, n$ の中に m の倍数が k 個あるとすると $km \leq n < (k+1)m$ が成り立つ。(ただし k は自然数とする)これを变形すると

$$km \leq n < (k+1)m$$

$$\Leftrightarrow \frac{n}{m} - 1 < k \leq \frac{n}{m}$$

となる。 k は自然数より $k = \left\lceil \frac{n}{m} \right\rceil$ となる。

イ

$11!$ の中に 2^3 の倍数は 1 個, 2^2 の倍数は 2 個, 2 の倍数は 5 個ある。したがって $11!$ は 2^8 で割り切れ 2^9 で割り切れないということになる。以上より $d_2(11) = 8$ となる。

ウ

アを用いると $1, 2, \dots, n$ の中に p^r の倍数は $\left\lceil \frac{n}{p^r} \right\rceil$ 個, p^{r-1} の倍数は $\left\lceil \frac{n}{p^{r-1}} \right\rceil$ 個, $\dots$ p の倍数は

$\left\lceil \frac{n}{p} \right\rceil$ 個あるので, イと同様の考え方をすると

$$d_p(n) = \sum_{i=1}^r \left\lceil \frac{n}{p^i} \right\rceil$$

となる。

エ

$$\begin{aligned} d_p(p^r) &= \sum_{i=1}^r p^{r-i} \\ &= \sum_{i=1}^r p^{r-1} \cdot \left(\frac{1}{p}\right)^{i-1} \\ &= \frac{p^{r-1} \left(\left(\frac{1}{p}\right)^r - 1 \right)}{\frac{1}{p} - 1} \\ &= \frac{p^r - 1}{p - 1} \end{aligned}$$

となる。

オ

q は p の倍数でない整数なのである整数 a を用いて $a < \frac{q}{p^i} < a+1$ とおける。ここで

$\left\lceil \frac{q}{p^i} \right\rceil = a$ であり, p^{r-i} は整数なので

$$p^{r-i} - (a+1) < p^{r-i} - \frac{q}{p^i} < p^{r-i} - a$$

が成立することから $\left\lceil p^{r-i} - \frac{q}{p^i} \right\rceil = p^{r-i} - (a+1)$ が成り立つ。以上より

$$\begin{aligned} \left\lceil \frac{q}{p^i} \right\rceil + \left\lceil p^{r-i} - \frac{q}{p^i} \right\rceil &= a + p^{r-i} - (a+1) \\ &= p^{r-i} - 1 \end{aligned}$$

となる。

カ

ウとオを用いると

$$\begin{aligned} d_p(q) + d_p(p^r - q) &= \sum_{i=1}^{r-1} \left\lceil \frac{q}{p^i} \right\rceil + \sum_{i=1}^{r-1} \left\lceil \frac{p^r - q}{p^i} \right\rceil \\ &= \sum_{i=1}^{r-1} \left(\left\lceil \frac{q}{p^i} \right\rceil + \left\lceil \frac{p^r - q}{p^i} \right\rceil \right) \\ &= \sum_{i=1}^{r-1} (p^{r-i} - 1) \\ &= p \cdot \frac{p^{r-1} - 1}{p - 1} - (r - 1) \\ &= \frac{p^r - p}{p - 1} - r + 1 \\ &= \frac{p^r - 1}{p - 1} - r \end{aligned}$$

となる。

II

キ ① ク ① ケ ㊦ コ ㊦ サ ① シ ① ス ㊦ セ ㊦ ソ ㊦

〔解説〕

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan x \, dx &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} -\frac{(\cos x)'}{\cos x} \, dx \\ &= \left[-\log |\cos x| \right]_0^{\frac{\pi}{3}} \\ &= \log 2\end{aligned}$$

である。また,

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos x}{1+\sin x} \, dx &= \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{(\sin x)'}{1+\sin x} \, dx \\ &= \left[\log(1+\sin x) \right]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \\ &= \log 3\end{aligned}$$

である。さらに,

$$\begin{aligned}\int_0^{\theta} \frac{1}{\cos x} \, dx &= \frac{1}{2} \int_0^{\theta} \left(\frac{\cos x}{1+\sin x} + \frac{\cos x}{1-\sin x} \right) \, dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\theta} \left(\frac{1}{1+\sin x} + \frac{1}{1-\sin x} \right) (\sin x)' \, dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\log \frac{1+\sin x}{1-\sin x} \right]_0^{\theta} \\ &= \frac{1}{2} \log \frac{1+\sin \theta}{1-\sin \theta} \\ &= \frac{1}{2} \log \left(\frac{1+\sin \theta}{\cos \theta} \right)^2 \\ &= \log \frac{1+\sin \theta}{\cos \theta}\end{aligned}$$

である。これより,

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos x} \, dx &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos x} \, dx \\ &= 2 \log \frac{1+\sin \frac{\pi}{6}}{\cos \frac{\pi}{6}} \\ &= \log 3\end{aligned}$$

である。さらにこれを用いて,

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin^2 x}{\cos x} \, dx &= \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos x} \, dx - 2 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos x \, dx \\ &= \log 3 - 2 \left[\sin x \right]_0^{\frac{\pi}{6}} \\ &= \log 3 - 1\end{aligned}$$

である。また,

$$\begin{aligned}\int_0^{\theta} \cos^3 x \, dx &= \int_0^{\theta} (1-\sin^2 x) (\sin x)' \, dx \\ &= \left[\sin x - \frac{\sin^3 x}{3} \right]_0^{\theta} \\ &= \sin \theta - \frac{\sin^3 \theta}{3}\end{aligned}$$

である。

Ⅲ

(1)

$$\begin{aligned}
 S_n &= \sum_{k=1}^n k x^{k-1} \\
 &= \sum_{k=1}^n (x^k)' \\
 &= \left(\sum_{k=1}^n x^k \right)' \\
 &= \left(\frac{x^{n+1} - x}{x-1} \right)' \\
 &= \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}
 \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad S_n = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}$$

(2)

A^2, A^3, A^4 を計算すると,

$$A^2 = \begin{pmatrix} x^2 & 2xy \\ 0 & x^2 \end{pmatrix}, A^3 = \begin{pmatrix} x^3 & 3x^2y \\ 0 & x^3 \end{pmatrix}, A^4 = \begin{pmatrix} x^4 & 4x^3y \\ 0 & x^4 \end{pmatrix}$$

となる。これより,

$$A^n = \begin{pmatrix} x^n & nx^{n-1}y \\ 0 & x^n \end{pmatrix}$$

と推測されるので、これを数学的帰納法で示す。

[1] $n=1$ のとき,

$$A = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^1 & 1 \cdot x^{1-1}y \\ 0 & x^1 \end{pmatrix}$$

より, 成り立つ。

[2] $n=k$ のとき成り立つとすると,

$$A^{k+1} = \begin{pmatrix} x^k & kx^{k-1}y \\ 0 & x^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^{k+1} & (k+1)x^{(k+1)-1}y \\ 0 & x^{k+1} \end{pmatrix}$$

より, $n=k+1$ のときも成り立つ。

以上[1], [2]より, 任意の自然数 n に対して $A^n = \begin{pmatrix} x^n & nx^{n-1}y \\ 0 & x^n \end{pmatrix}$ である。

(証明終)

(3)

(1), (2)より,

$$\begin{aligned}
 a_n &= d_n = 1 + \sum_{k=1}^n x^k = \frac{x^{n+1} - 1}{x-1} \\
 b_n &= \sum_{k=1}^n kx^{k-1}y = S_n y = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2} y \\
 c_n &= 0
 \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad a_n = d_n = \frac{x^{n+1} - 1}{x-1}, b_n = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2} y, c_n = 0$$

IV

(1)

$t = \sqrt{x}$ とおくと,

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +0} \sqrt{x} \log x \\ &= \lim_{t \rightarrow +0} t \log t^2 \\ &= \lim_{t \rightarrow +0} 2t \log t \\ &= 0 \quad \left(\because \lim_{t \rightarrow +0} t \log t = 0 \right)\end{aligned}$$

となる。

(答) $\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = 0$

(2)

$f(x)$ を微分すると,

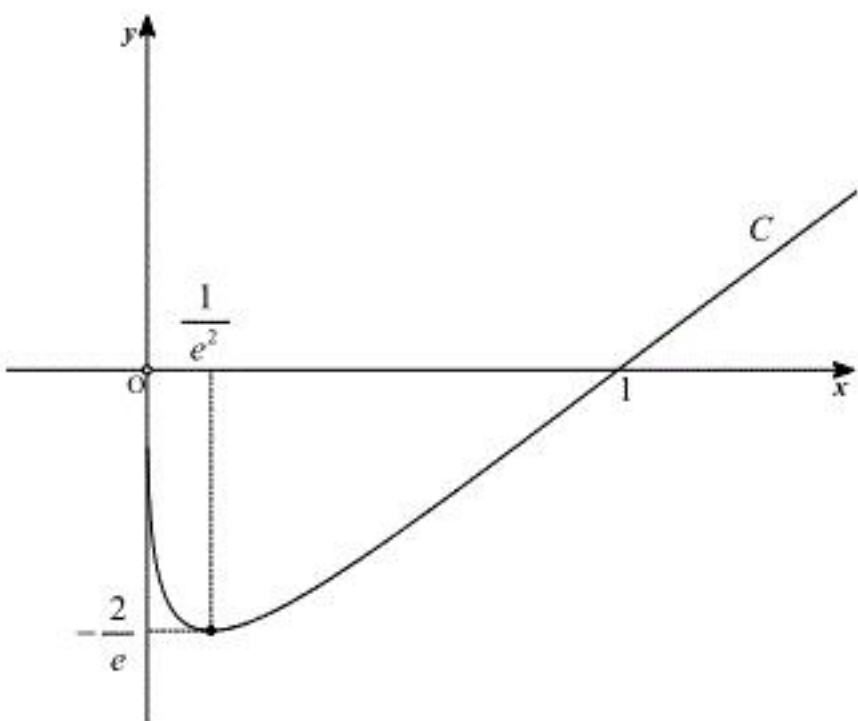
$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \log x + \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{\log x + 2}{2\sqrt{x}} \\ f''(x) &= -\frac{1}{4x\sqrt{x}} \log x + \frac{1}{2x\sqrt{x}} - \frac{1}{2x\sqrt{x}} = -\frac{\log x}{4x\sqrt{x}}\end{aligned}$$

となるから, $f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{e^2}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$		$+$	$+$	$+$	0	$-$
$f(x)$	(0)	$\searrow$	$-\frac{2}{e}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$

増減表より, $f(x)$ は $x = \frac{1}{e^2}$ のときに極小値 $-\frac{2}{e}$ をとり, 変曲点は $(1, 0)$ である。

さらに, C の概形は次図のようになる。



(答) 極小値 $-\frac{2}{e}$ ($x = \frac{1}{e^2}$ のとき), 変曲点 $(1, 0)$

(3)

(2)の答より,

$$b = 1$$

である。よって,

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x) dx &= \int_a^1 \sqrt{x} \log x dx \\ &= \left[\frac{2}{3} x \sqrt{x} \log x \right]_a^1 - \int_a^1 \frac{2}{3} \sqrt{x} dx \\ &= -\frac{2}{3} a \sqrt{a} \log a - \left[\frac{4}{9} x \sqrt{x} \right]_a^1 \\ &= -\frac{2}{3} a \sqrt{a} \log a + \frac{4}{9} a \sqrt{a} - \frac{4}{9}\end{aligned}$$

となる。さらに,

$$\begin{aligned}\lim_{a \rightarrow +0} a \sqrt{a} \log a &= \lim_{a \rightarrow +0} \{(a \log a) \cdot \sqrt{a}\} = 0 \cdot 0 = 0 \\ \lim_{a \rightarrow +0} a \sqrt{a} &= 0\end{aligned}$$

であるから,

$$\lim_{a \rightarrow +0} \int_a^b f(x) dx = -\frac{4}{9}$$

となる。

(答)
$$\begin{cases} \int_a^b f(x) dx = -\frac{2}{3} a \sqrt{a} \log a + \frac{4}{9} a \sqrt{a} - \frac{4}{9} \\ \lim_{a \rightarrow +0} \int_a^b f(x) dx = -\frac{4}{9} \end{cases}$$