

2011 年度 入学 試験 問題

数 学

(試験時間 15:20~17:00 100分)

1. 解答用紙は、記述解答用紙とマーク解答用紙の2種類がありますので注意してください。
2. 解答は、必ず解答欄に記入してください。なお、解答欄以外に書くと無効となりますので注意してください。
3. 解答は、HBの鉛筆またはシャープペンシルを使用し、訂正する場合は、プラスチック製の消しゴムを使用してください。特に、マーク解答用紙には鉛筆のあとや消しくずを残さないでください。また、折りまげたり、汚したりしないでください。記述解答用紙の下敷きにマーク解答用紙を使用することは絶対にさけてください。
4. 解答用紙には、受験番号と氏名を必ず記入してください。
5. マーク解答用紙の受験番号および受験番号のマーク記入は、電算処理上非常に重要なので、誤記のないよう特に注意してください。
6. 設問文にある点数は、満点が100点となるような配点表示になっていますが、数学科は満点が200点であり、各問の配点は2倍になります。

I 次の問題文の空欄にもっとも適する答えを解答群から選び、その記号をマーク解
 用紙にマークせよ。ただし、同じ記号を2度以上用いてもよい。(20点)

実数 x に対して、 $n \leq x$ を満たす最大の整数 n を $[x]$ で表す。この記号 $[]$ をガ
 ウス記号という。例えば、 $[2] = 2$ 、 $[\frac{3}{2}] = 1$ 、 $[\pi] = 3$ などである。自然数 m 、 n
 に対し、 $1, 2, \dots, n$ の中にある m の倍数の個数は、ガウス記号を用いて $\boxed{\text{ア}}$ と
 表される。

次に、素数 p と自然数 n に対し、 p^k が $n!$ を割り切るような最大の整数 k を $d_p(n)$
 で表す。例えば、 $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3$ だから $d_2(3) = 1$ であり、 $6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6$ だから
 $d_2(6) = 4$ 、 $d_3(6) = 2$ である。同様に $d_2(11) = \boxed{\text{イ}}$ である。

さて、与えられた素数 p と自然数 n に対し、整数 r を $p^r \leq n < p^{r+1}$ を満たすよ
 うにとる。 $1, 2, \dots, n$ の中にある

p の倍数の個数、 p^2 の倍数の個数、 \dots 、 p^r の倍数の個数

を考えることにより、 $d_p(n)$ はガウス記号を用いて

$$d_p(n) = \sum_{\ell=1}^r \boxed{\text{ウ}}$$

と表される。なお、 $\ell > r$ のときは $\boxed{\text{ウ}} = 0$ であるから、整数 R が $R \geq r$ を

満たすとき、 $d_p(n) = \sum_{\ell=1}^R \boxed{\text{ウ}}$ と表すこともできる。

特に $n = p^r$ のときは、 $\ell = 1, 2, \dots, r$ に対して $\boxed{\text{ウ}} = p^{r-\ell}$ であるから

$$d_p(p^r) = \boxed{\text{エ}}$$

である。

また整数 q が、 p の倍数でなく $1 \leq q < p^r$ の範囲にあるとする。このとき、

$\ell = 1, 2, \dots, r-1$ に対して

$$\left[\frac{q}{p^\ell} \right] + \left[\frac{p^r - q}{p^\ell} \right] = \left[\frac{q}{p^\ell} \right] + \left[p^{r-\ell} - \frac{q}{p^\ell} \right] = p^{r-\ell} - \boxed{\text{オ}}$$

となり、

$$d_p(q) + d_p(p^r - q) = \boxed{\text{カ}}$$

が成り立つ。

問題 I のアの解答群

- (a) $\left[\frac{n}{m}\right] - 1$ (b) $\left[\frac{n}{m}\right]$ (c) $\left[\frac{n}{m}\right] + 1$
 (d) $\left[\frac{n+1}{m}\right] - 1$ (e) $\left[\frac{n+1}{m}\right]$ (f) $\left[\frac{n+1}{m}\right] + 1$
 (g) $\left[\frac{n}{m+1}\right] - 1$ (h) $\left[\frac{n}{m+1}\right]$ (i) $\left[\frac{n}{m+1}\right] + 1$

問題 I のイ、オの解答群

- (a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3 (e) 4 (f) 5
 (g) 6 (h) 7 (i) 8 (j) 9 (k) 10 (l) 11

問題 I のウの解答群

- (a) $\left[\frac{n}{p^{\ell-1}}\right] - 1$ (b) $\left[\frac{n}{p^{\ell-1}}\right]$ (c) $\left[\frac{n}{p^{\ell-1}}\right] + 1$ (d) $\left[\frac{n}{p^{\ell-1}}\right] - \left[\frac{n}{p^{\ell}}\right]$
 (e) $\left[\frac{n}{p^{\ell}}\right] - 1$ (f) $\left[\frac{n}{p^{\ell}}\right]$ (g) $\left[\frac{n}{p^{\ell}}\right] + 1$ (h) $\left[\frac{n}{p^{\ell}}\right] - \left[\frac{n}{p^{\ell+1}}\right]$
 (i) $(\ell-1)\left[\frac{n}{p^{\ell-1}}\right]$ (j) $\ell\left[\frac{n}{p^{\ell}}\right]$

問題 I のエ、カの解答群

- (a) $\frac{p^r-1}{p-1}$ (b) $\frac{p^r-1}{p-1} - r$ (c) $\frac{p^r-1}{p-1} - 2r$
 (d) $\frac{p^r-1}{p-1} - (r-1)$ (e) $\frac{p^r-1}{p-1} - 2(r-1)$
 (f) $\frac{p^{r+1}-1}{p-1}$ (g) $\frac{p^{r+1}-1}{p-1} - r$ (h) $\frac{p^{r+1}-1}{p-1} - 2r$
 (i) $\frac{p^{r+1}-1}{p-1} - (r-1)$ (j) $\frac{p^{r+1}-1}{p-1} - 2(r-1)$

(設問は次ページに続く。)

II 次の問題文の空欄にもっとも適する答えを解答群から選び、その記号をマーク解
用紙にマークせよ。ただし、同じ記号を2度以上用いてもよい。(20点)

$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ の範囲で、三角関数に関する積分の計算を行ってみよう。

まず $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = -\frac{(\cos x)'}{\cos x}$ より $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan x \, dx = \boxed{\text{キ}}$ である。同様に

して $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos x}{1 + \sin x} \, dx = \boxed{\text{ク}}$ が求まる。そこで

$$\frac{\cos x}{1 + \sin x} + \frac{\cos x}{1 - \sin x} = \frac{2 \cos x}{1 - \sin^2 x} = \frac{2}{\cos x}$$

を利用すれば、 $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ のとき

$$\int_0^{\theta} \frac{1}{\cos x} \, dx = \log \left(\frac{1 + \boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}} \right)$$

が得られ、これより $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos x} \, dx = \boxed{\text{サ}}$ がわかる。さらにこれを用いて、例

えば $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin^2 x}{\cos x} \, dx = \boxed{\text{シ}} - \boxed{\text{ス}}$ と計算される。

また、 $\cos^3 x$ についても、 $\cos^3 x = (1 - \sin^2 x)\cos x$ を利用すれば

$$\int_0^{\theta} \cos^3 x \, dx = \boxed{\text{セ}} - \frac{1}{3} \left(\boxed{\text{ソ}} \right)^3$$

が得られる。

問題IIの解答群

- | | | | |
|---------------------|---------------------|---------------------|--------------------|
| (a) 0 | (b) 1 | (c) 2 | (d) 3 |
| (e) $\sqrt{2}$ | (f) $\sqrt{3}$ | (g) $\frac{\pi}{2}$ | (h) π |
| (i) $\log 2$ | (j) $\log 3$ | (k) $-\log 2$ | (l) $-\log 3$ |
| (m) θ | (n) $\sin \theta$ | (o) $\cos \theta$ | (p) $\tan \theta$ |
| (q) $\sin^2 \theta$ | (r) $\cos^2 \theta$ | (s) $-\sin \theta$ | (t) $-\cos \theta$ |

(設問は次ページに続く。)

III n を自然数, x, y を実数とし, $x \neq 1$ とする。また, 2 次の正方行列 A, E を

$$A = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

と定める。以下の問いに答えよ。(30 点)

- (1) $x \neq 1$ に注意して, 和 $S_n = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1}$ を求めよ。
- (2) A^2, A^3, A^4 を求めよ。また, 一般の自然数 n に対する A^n の形を推測し, それを数学的帰納法によって証明せよ。
- (3) $E + A + A^2 + \cdots + A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$ とおくことにより, 数列 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}, \{d_n\}$ を定める。 a_n, b_n, c_n, d_n を求めよ。

(設問は次ページに続く。)

IV $x > 0$ に対し $f(x) = \sqrt{x} \log x$ とおき、関数 $y = f(x)$ のグラフを C とする。以下の問いに答えよ。(30 点)

- (1) 極限 $\lim_{x \rightarrow +0} f(x)$ を求めよ。ただし、 $\lim_{t \rightarrow +0} t \log t = 0$ を用いてよい。
- (2) 関数 $f(x)$ の極値とグラフ C の変曲点を求め、 C の概形を描け。
- (3) C の変曲点を $(b, f(b))$ とする。 $a > 0$ に対し、定積分 $\int_a^b f(x) dx$ を a を用いて表し、極限 $\lim_{a \rightarrow +0} \int_a^b f(x) dx$ を求めよ。

(以下計算用紙)