

I

(1)

実数 k を用いて、

$$a^k = M$$

と表せるとき、この k のことを

$$k = \log_a M$$

と表し、 a を底とする M の対数という。

(答) $\log_a M$ の定義：実数 k を用いて $a^k = M$ と表せるとき、この k のこと

(2)

$\log$ の定義より

$$\log_a M = k$$

とおくとき、

$$a^k = M$$

が成り立つ。 b を底としてこの両辺の対数をとると、

$$\log_b a^k = \log_b M$$

$$\Leftrightarrow k \log_b a = \log_b M$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{\log_b M}{\log_b a}$$

$$\therefore \log_a M = \frac{\log_b M}{\log_b a}$$

となる。

(証明終)

(3)

(2)より、

$$\log_9 q = \frac{\log_3 q}{\log_3 9} = \frac{1}{2} \log_3 q$$

である。これを与式に代入すると、

$$m \log_3 p + n \log_9 q = 2$$

$$\Leftrightarrow m \log_3 p + \frac{n}{2} \log_3 q = 2$$

$$\Leftrightarrow \log_3 p^m \cdot q^{\frac{n}{2}} = 2$$

$$\therefore p^m \cdot q^{\frac{n}{2}} = 3^2 \quad \cdots \textcircled{5}$$

を得る。 m, n, p, q は正の整数であるから、この条件と⑤を満たすような (p, q) の組み合わせ

を求めればよい。 p^m は正の整数であるから、 $q^{\frac{n}{2}}$ も正の整数でなければならない。したがっ

て、 $\left(p^m, q^{\frac{n}{2}}\right)$ の組み合わせは、

$$\left(p^m, q^{\frac{n}{2}}\right) = (1, 9), (3, 3), (9, 1)$$

の3通りである。

$$[1] \quad \left(p^m, q^{\frac{n}{2}}\right) = (1, 9) \text{ のとき}$$

このとき

$$p = 1 \quad m: \text{任意の正の整数}$$

である。また、

$$(q, n) = (3, 4), (9, 2), (81, 1)$$

であるから、

$$(p, q) = (1, 3), (1, 9), (1, 81)$$

と求まる。

$$[2] \quad \left(p^m, q^{\frac{n}{2}}\right) = (3, 3) \text{ のとき}$$

このとき

$$(p, m) = (3, 1)$$

である。また、

$$(q, n) = (3, 2), (9, 1)$$

であるから、

$$(p, q) = (3, 3), (3, 9)$$

と求まる。

$$[3] \quad \left(p^m, q^{\frac{n}{2}}\right) = (9, 1) \text{ のとき}$$

このとき

$$(p, m) = (9, 1), (3, 2)$$

である。また、

$$q = 1 \quad n: \text{任意の正の整数}$$

であるから、

$$(p, q) = (9, 1), (3, 1)$$

と求まる。

以上より、求める (p, q) は

$$(p, q) = (1, 3), (1, 9), (1, 81), (3, 1), (3, 3), (3, 9), (9, 1)$$

である。

(答) $(p, q) = (1, 3), (1, 9), (1, 81), (3, 1), (3, 3), (3, 9), (9, 1)$

II

(1)

カードは全部で $n+7$ 枚あり、この中から 3 枚同時に抜き出す方法は ${}_{n+7}C_3$ 通りある。

まず、3 枚とも同じ文字である確率を求める。

[1] $0 \leq n \leq 2$ のとき

U を 3 枚抜き出せばよい。この確率は、

$$\frac{{}_4C_3}{{}_{n+7}C_3} = \frac{24}{(n+7)(n+6)(n+5)}$$

である。

[2] $n \geq 3$ のとき

U を 3 枚か、O を 3 枚抜き出せばよい。この確率は、

$$\begin{aligned} \frac{{}_4C_3 + {}_n C_3}{{}_{n+7}C_3} &= \frac{24 + n(n-1)(n-2)}{(n+7)(n+6)(n+5)} \\ &= \frac{(n+2)(n^2-5n+12)}{(n+7)(n+6)(n+5)} \end{aligned}$$

である。[1]と比較すると、これは $0 \leq n \leq 2$ のときも成り立つことが分かる。

以上より、3 枚とも同じ文字である確率は $\frac{(n+2)(n^2-5n+12)}{(n+7)(n+6)(n+5)}$ である。

次に、すべて異なる文字である確率を求める。

3 つの文字を選び、それぞれのカードを 1 枚ずつ抜き出せばよい。この確率は、

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 4 + 1 \cdot 2 \cdot n + 1 \cdot 4 \cdot n + 2 \cdot 4 \cdot n}{{}_{n+7}C_3} = \frac{12(7n+4)}{(n+7)(n+6)(n+5)}$$

である。

$$(\text{答}) \text{ 3 枚とも同じ文字である確率は } \frac{(n+2)(n^2-5n+12)}{(n+7)(n+6)(n+5)}$$

$$\text{すべて異なる文字である確率は } \frac{12(7n+4)}{(n+7)(n+6)(n+5)}$$

(2)

(1)の答を用いると、ゲームで得る得点の期待値は

$$\begin{aligned} 2 \cdot \frac{(n+2)(n^2-5n+12)}{(n+7)(n+6)(n+5)} - \frac{12(7n+4)}{(n+7)(n+6)(n+5)} &= \frac{2n(n+5)(n-8)}{(n+7)(n+6)(n+5)} \\ &= \frac{2n(n-8)}{(n+7)(n+6)} \end{aligned}$$

である。これが 0 点以下になる条件は、

$$\frac{2n(n-8)}{(n+7)(n+6)} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 2n(n-8) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq n \leq 8$$

である。

(答) $0 \leq n \leq 8$

Ⅲ

(1)

$$f'(x)=2x+1$$

であるから、 $x=t$ における $y=f(x)$ の接線の方程式は、

$$\begin{aligned} y &= (2t+1)(x-t)+t^2+t+1 \\ \Leftrightarrow y &= (2t+1)x-t^2+1 \end{aligned}$$

と表される。これが原点を通るとき、

$$0=-t^2+1\Leftrightarrow t=\pm 1$$

であるから、2接線の方程式は

$$y=3x, y=-x$$

である。よって、 $m<m', c<0<c'$ を考慮すると、

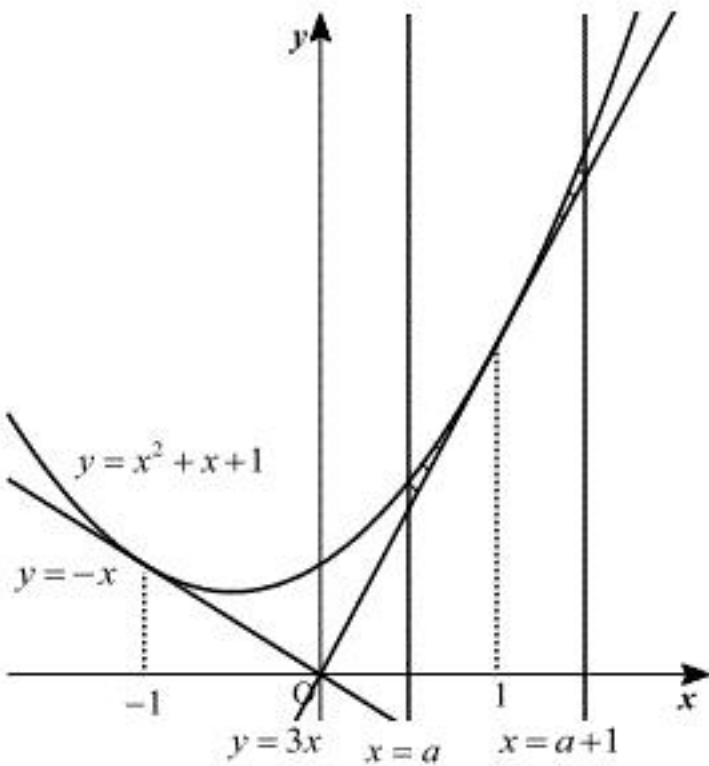
$$m=-1, m'=3, c=-1, c'=1$$

を得る。

(答) $m=-1, m'=3, c=-1, c'=1$

(2)

$0<a\leq c'=1$ のとき、 $S(a)$ は次図斜線部の面積である。



これより、

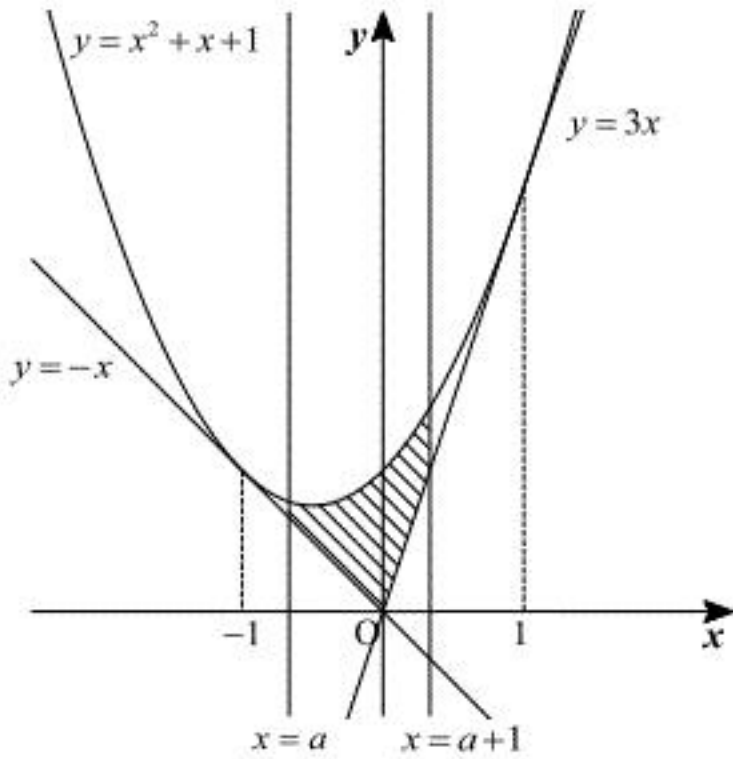
$$\begin{aligned} S(a) &= \int_a^{a+1} \{(x^2+x+1)-3x\} dx \\ &= \int_a^{a+1} (x-1)^2 dx \\ &= \left[\frac{(x-1)^3}{3} \right]_a^{a+1} \\ &= \frac{a^3}{3} - \frac{(a-1)^3}{3} \\ &= \frac{1}{3} \{a-(a-1)\} \{a^2+a(a-1)+(a-1)^2\} \\ &= \frac{1}{3} (3a^2-3a+1) \end{aligned}$$

である。

(答) $S(a)=\frac{1}{3}(3a^2-3a+1)$

(3)

$c=-1\leq a\leq 0$ のとき、 $S(a)$ は次図斜線部の面積である。



これより、

$$\begin{aligned} S(a) &= \int_0^{a+1} \{(x^2+x+1)-3x\} dx + \int_a^0 \{(x^2+x+1)-(-x)\} dx \\ &= \int_0^{a+1} (x-1)^2 dx + \int_a^0 (x+1)^2 dx \\ &= \left[\frac{(x-1)^3}{3} \right]_0^{a+1} + \left[\frac{(x+1)^3}{3} \right]_a^0 \\ &= \frac{a^3+1}{3} + \frac{1-(a+1)^3}{3} \\ &= -a^2-a+\frac{1}{3} \end{aligned}$$

である。

(答) $S(a)=-a^2-a+\frac{1}{3}$

(4)

[1] $0<a\leq c'=1$ のとき

$$S(a)=\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{12}$$

であるから、 $S(a)$ の増減表は次のようになる。

a	0	...	$\frac{1}{2}$	...	1
$S(a)$	$\frac{1}{3}$	$\searrow$	$\frac{1}{12}$	$\nearrow$	$\frac{1}{3}$

[2] $c=-1\leq a\leq 0$ のとき

$$S(a)=-\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{12}$$

であるから、 $S(a)$ の増減表は次のようになる。

a	-1	...	$-\frac{1}{2}$	...	0
$S(a)$	$\frac{1}{3}$	$\nearrow$	$\frac{7}{12}$	$\searrow$	$\frac{1}{3}$

[1], [2]より、 $S(a)$ の最大値は $\frac{7}{12}$ 、最小値は $\frac{1}{12}$ である。

(答) 最大値 $\frac{7}{12}$ 、最小値 $\frac{1}{12}$