

I

(1) $(x-1)(x-3)(x+2)$

(2) $k < 1, 2 < k$

(3) 最大値：6，最小値： $-\frac{1}{8}$

(4) 65 個

(5) 302 桁

(6) $\sin A : \sin B : \sin C = 6 : 4 : 5$

〔解説〕

(1)
$$\begin{aligned} x^3 - 2x^2 - 5x + 6 &= (x-1)(x^2 - x - 6) \\ &= (x-1)(x-3)(x+2) \end{aligned}$$

である。

(2)
$$x^2 - 2kx + 3k - 2 = 0$$

この方程式の判別式を D とすると、

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &= k^2 - 3k + 2 > 0 \\ \Leftrightarrow (k-2)(k-1) &> 0 \\ \Leftrightarrow k < 1, 2 < k \end{aligned}$$

となる。

(3)
$$\begin{aligned} y &= 2x^2 - 3x + 1 \\ &= 2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{1}{8} \end{aligned}$$

となる。 x の変域が $-1 \leq x \leq 2$ であることより

$$\begin{aligned} x = -1 \text{ のとき, 最大値: } 6 \\ x = \frac{3}{4} \text{ のとき, 最小値: } -\frac{1}{8} \end{aligned}$$

である。

(4) 5 個の数字を使って作れる 4 桁の数字は ${}_5P_4 = 120$ 個

ある。余事象を考える。まず、千の位が 1 の数は

$${}_4P_3 = 24 \text{ 個}$$

ある。同様に千の位が 2 の数も

$${}_4P_3 = 24 \text{ 個}$$

ある。次に千の位が 3 の数で 3215 未満の数を大きい方から順番に数えると、

$$3214, 3154, 3152, 3145, 3142, 3125, 3124$$

の 7 個ある。よって、求める数は、

$$120 - (24 + 24 + 7) = 65 \text{ 個}$$

となる。

(5) 2^{1000} が x 桁の数であるとして、
$$1 \cdot 10^{x-1} \leq 2^{1000} < 1 \cdot 10^x$$

が成り立つ。ここで、各辺の常用対数をとると、

$$\begin{aligned} \log_{10} 10^{x-1} &\leq 1000 \cdot \log_{10} 2 < \log_{10} 10^x \\ \Leftrightarrow x-1 &\leq 1000 \cdot 0.30103 < x \\ \Leftrightarrow x-1 &\leq 301.03 < x \end{aligned}$$

となる。これより、 $x = 302$ となるので、 2^{1000} は 302 桁の数である。

(6) 正弦定理より、

$$\frac{BC}{\sin A} = \frac{CA}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C}$$

が成り立つ。よって、

$$\sin A : \sin B : \sin C = BC : CA : AB = 6 : 4 : 5$$

である。

II

(1)

直線 $y = mx + n$ は点 $P(4, 0)$ を通るので、

$$0 = 4m + n \Leftrightarrow n = -4m$$

である。

直線 $y = mx + n \Leftrightarrow mx - y + n = 0$ が円と 2 個の共有点をもつ条件は、円の中心 $(-4, 0)$ から直線までの距離が円の半径 4 より短いことである。したがって、点と直線の距離の公式を用いて、

$$\begin{aligned} \frac{|-4m + n|}{\sqrt{m^2 + 1}} &< 4 \\ \Leftrightarrow |-8m| &< 4\sqrt{m^2 + 1} \\ \Leftrightarrow |2m| &< \sqrt{m^2 + 1} \end{aligned}$$

両辺 0 以上であるから 2 乗して、

$$\begin{aligned} 4m^2 &< m^2 + 1 \\ \Leftrightarrow m^2 &< \frac{1}{3} \\ \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{3}}{3} &< m < \frac{\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad -\frac{\sqrt{3}}{3} < m < \frac{\sqrt{3}}{3}$$

(2)

$Q(p, q)$ とする。PQ を 3:2 に内分する点を $X(x, y)$ とおくと、

$$\begin{cases} x = \frac{2 \cdot 4 + 3p}{3+2} \\ y = \frac{2 \cdot 0 + 3q}{3+2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = \frac{5x-8}{3} \\ q = \frac{5}{3}y \end{cases}$$

である。ここで、点 $Q(p, q)$ は円周上の点であるから、

$$\begin{aligned} \left(\frac{5x-8}{3} + 4\right)^2 + \left(\frac{5}{3}y\right)^2 &= 16 \\ \Leftrightarrow \left(\frac{5}{3}x + \frac{4}{3}\right)^2 + \frac{25}{9}y^2 &= 16 \\ \Leftrightarrow \left(x + \frac{4}{5}\right)^2 + y^2 &= \frac{144}{25} \end{aligned}$$

である。したがって、点 X の軌跡は、

$$\text{中心} \left(-\frac{4}{5}, 0\right), \text{半径} \frac{12}{5} \text{ の円}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \text{中心} \left(-\frac{4}{5}, 0\right), \text{半径} \frac{12}{5} \text{ の円}$$

Ⅲ

(1)

上から k 段目の硬貨の個数は k 個であり、全部で n 段あるから、

$$t_n = \sum_{k=1}^n k = \frac{1}{2}n(n+1)$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad t_n = \frac{1}{2}n(n+1)$$

(2)

$$t_n \leq 300$$

を満たす最大の自然数 n を求める。

$$\frac{1}{2}n(n+1) \leq 300$$

$$\Leftrightarrow n(n+1) \leq 600$$

$$\Leftrightarrow n(n+1) \leq 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2$$

$$\Leftrightarrow n(n+1) \leq 24 \cdot 25$$

と変形できる。 n は自然数であるから、上式を満たす最大の自然数は

$$n = 24$$

である。 $n = 1, 2, \dots, 24$ のとき t_n は 300 以下となるから、300 以下の自然数のうち三角数は 24 個ある。

(答) 24 個

(3)

(1)より、

$$t_n = \frac{1}{2}n(n+1)$$

である。 $\frac{1}{2}n(n+1)$ が 3 の倍数となるとき $n(n+1)$ も 3 の倍数である。 $n, n+1$ は連続する自然数であるから、 $n, n+1$ は互いに素であるので、同時に 3 の倍数となることはない。したがって、 $n, n+1$ のどちらか一方が 3 の倍数となる。次に逆を考えると、 $n, n+1$ のどちらか一方が 3 の倍数のとき、 $n(n+1)$ も 3 の倍数である。 $n, n+1$ は連続する自然数だから、そのどちらかは偶数である。したがって、 $\frac{1}{2}n(n+1)$ は自然数となるので、3 の倍数となる。

以上より、 $t_n = \frac{1}{2}n(n+1)$ が 3 の倍数であるのは、 n が 3 の倍数であるか、 $n+1$ が 3 の倍数で

あるかのいずれかのとき、またその時に限る。

(証明終)

(4)

(3)より、 t_n が 3 の倍数となるためには n または $n+1$ が 3 の倍数となればよい。すなわち、 n が 3 の倍数または 3 で割ると 2 余ればよい。(1)より、三角数が 300 以下となるのは n が $n \leq 24$ を満たすときである。

$$\begin{cases} n: 3 \text{ の倍数または } 3 \text{ で割ると } 2 \text{ 余る数} \\ n \leq 24 \end{cases}$$

を満たす自然数 n は

$$2, 3, 5, 6, \dots, 23, 24$$

であるから、その個数は 16 個である。

(答) 16 個

(5)

300 以下の自然数のうち 3 の倍数であるものは 100 個ある。したがって、300 以下で 3 の倍数でもなく三角数でもない自然数の個数を A 、300 以下で 3 の倍数となる自然数の個数を B 、300 以下で三角数となる自然数の個数を C 、300 以下で 3 の倍数かつ三角数となる自然数の個数を D とすると、(2)、(4)の答より、

$$\begin{aligned} A &= 300 - (B + C - D) \\ &= 300 - (100 + 24 - 16) \\ &= 300 - 108 \\ &= 192 \end{aligned}$$

と求まる。

(答) 192 個