

I

〔解答〕

$$(1) \ 6x^4 + 7x^3 - 9x^2 - 7x + 3 \quad (2) \ m = 3 \quad (3) \text{ 最大値 } \frac{1}{8}, \text{ 最小値 } -3$$

$$(4) \ 15 \quad (5) \ \frac{1}{3} \quad (6) \ V' = 4\pi r^2, \text{ 半径 } r \text{ の球の表面積}$$

〔解説〕

(1)

与式を展開すると、

$$\begin{aligned} & (x+1)(x-1)(2x+3)(3x-1) \\ &= (x^2-1)(6x^2+7x-3) \\ &= 6x^4+7x^3-9x^2-7x+3 \end{aligned}$$

となる。

(2)

与えられた 2 次方程式が実数解を持たない条件は、判別式を D として

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &= (-m)^2 - (6m-8) < 0 \\ \Leftrightarrow m^2 - 6m + 8 &< 0 \\ \Leftrightarrow (m-4)(m-2) &< 0 \\ \Leftrightarrow 2 < m < 4 \end{aligned}$$

である。ここで、 m は自然数であるから、 $m=3$ である。

(3)

与式を変形すると、

$$\begin{aligned} y &= 2\sin^2 \theta + \cos \theta - 2 \\ &= 2(1 - \cos^2 \theta) + \cos \theta - 2 \\ &= -2\cos^2 \theta + \cos \theta \\ &= -2\left(\cos \theta - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{8} \end{aligned}$$

となる。

ここで、 $-1 \leq \cos \theta \leq 1$ より、最大値は $\frac{1}{8} \left(\cos \theta = \frac{1}{4} \right)$ 、最小値は -3 ($\cos \theta = -1$) である。

(4)

$$\begin{aligned} \int_1^2 (3x^2 + 4x + 2) dx &= \left[x^3 + 2x^2 + 2x \right]_1^2 \\ &= (2^3 - 1^3) + 2(2^2 - 1^2) + 2(2 - 1) \\ &= 7 + 6 + 2 \\ &= 15 \end{aligned}$$

となる。

(5)

条件を満たす (a, b) の組み合わせは、

$$(6, 1), (6, 2), (6, 3), (5, 1), (5, 2), (4, 1), (1, 6), (2, 6), (3, 6), (1, 5), (2, 5), (1, 4)$$

の 12 通りである。よって、求める確率は

$$\frac{12}{6 \cdot 6} = \frac{1}{3}$$

である。

(6)

$$V' = 4\pi r^2$$

であり、これは半径 r の球の表面積を表している。

II

(1)

2本の平行な直線の組が n 組あるところに $(n+1)$ 組目の直線を書くと、交点の総数は $2 \cdot 2n = 4n$ (個)だけ増える。したがって、

$$a_{n+1} = a_n + 4n$$

となる。

(答) $a_{n+1} = a_n + 4n$

(2)

$n=1$ のとき交点は無いので、 $a_1 = 0$ である。

$n \geq 2$ のとき、

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} 4k \\ &= 4 \cdot \frac{1}{2} (n-1)n \\ &= 2n^2 - 2n \end{aligned}$$

となる。この式は $n=1$ としても成り立つ。

(答) $a_n = 2n^2 - 2n$

(3)

2本の平行な直線の組が n 組あるところに $(n+1)$ 組目の直線を書くと、直線によって分けられている部分の個数は $2(2n+1) = 4n+2$ (個)だけ増える。したがって、

$$b_{n+1} = b_n + 4n + 2$$

となる。

(答) $b_{n+1} = b_n + 4n + 2$

(4)

$n=1$ のとき平面は3つに分けられるので、 $b_1 = 3$ である。

$n \geq 2$ のとき、

$$\begin{aligned} b_n &= b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (b_{k+1} - b_k) \\ &= 3 + \sum_{k=1}^{n-1} (4k + 2) \\ &= 3 + 4 \cdot \frac{1}{2} (n-1)n + 2(n-1) \\ &= 2n^2 + 1 \end{aligned}$$

となる。この式は $n=1$ としても成り立つ。

(答) $b_n = 2n^2 + 1$

Ⅲ

(1)

グループ全員の人数を x 人とする。

全員が電車で移動すれば、運賃の合計は $420x$ 円である。

全員がバスで移動するとき、団体券を 1 枚買うと運賃の合計は、

$$10000 + 480(x - 25) = 480x - 2000 \text{ 円}$$

であり、団体券を 2 枚買うと運賃の合計は 20000 円である。ここで、

$$480x - 2000 < 20000$$

$$\Leftrightarrow 480x < 22000$$

$$\Leftrightarrow x < 45.8\cdots$$

であるから、 $25 \leq x \leq 45$ のときは団体券を 1 枚、 $46 \leq x \leq 50$ のときは団体券を 2 枚買った方が安い。以下、電車を使って移動した方が運賃が安くなる条件を求める。

[1] $25 \leq x \leq 45$ のとき

$$420x < 480x - 2000$$

$$\Leftrightarrow 60x > 2000$$

$$\Leftrightarrow x > 33.3\cdots$$

$$\therefore 34 \leq x \leq 45$$

[2] $46 \leq x \leq 50$ のとき

$$420x < 20000$$

$$\Leftrightarrow x < 47.6\cdots$$

$$\therefore 46 \leq x \leq 47$$

以上より、電車を使って移動した方が運賃が安くなるのはグループの人数が 34 人以上、47 人以下のときである。

(答) 34 人以上、47 人以下のとき

(2)

グループの人数は 48 人である。

(1)より、47 人でも 48 人でも団体券を買う枚数は 2 枚の方が安いので、運賃の合計は 20000 円である。したがって、当日移動した人の 1 人あたりの運賃の期待値は、

$$\frac{20000}{47}p + \frac{20000}{48}(1-p) = \frac{1250}{141}(p+47) \text{ 円}$$

となる。また、これが電車賃より安くなるのは、

$$\frac{1250}{141}(p+47) < 420$$

$$\Leftrightarrow \frac{1250}{141}p < \frac{10}{3}$$

$$\Leftrightarrow p < \frac{47}{125}$$

のときである。

$$(答) \begin{cases} 1 \text{ 人あたりの運賃の期待値} & \frac{1250}{141}(p+47) \text{ 円} \\ \text{電車賃より安くなるとき} & p < \frac{47}{125} \end{cases}$$