

I

問1

$$a_n = 1 + 3(n-1)$$

より,

$$\begin{aligned} b_n &= a_{2n} \\ &= 1 + 3(2n-1) \\ &= 6n-2 \end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{10} b_n &= \sum_{n=1}^{10} (6n-2) \\ &= 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot (10+1) - 2 \cdot 10 \\ &= 330 - 20 \\ &= 310 \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \sum_{n=1}^{10} b_n = 310$$

問2

$$\begin{aligned} c_n &= 1 + 3(kn-1) \\ &= 3kn-2 \end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{10} c_n &= \sum_{n=1}^{10} (3kn-2) \\ &= 3k \cdot \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot (10+1) - 2 \cdot 10 \\ &= 165k - 20 \end{aligned}$$

である。したがって,

$$\begin{aligned} 800 &\leq 165k - 20 \leq 900 \\ \Leftrightarrow 820 &\leq 165k \leq 920 \\ \Leftrightarrow \frac{820}{165} &\leq k \leq \frac{920}{165} \end{aligned}$$

となるので,

$$\begin{aligned} \frac{820}{165} &= 4.96\cdots \\ \frac{920}{165} &= 5.57\cdots \end{aligned}$$

より, 自然数 k は,

$$k = 5$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad k = 5$$

II

問 1

$\triangle OAB$ の面積を S とすると,

$$S = \frac{1}{2} |a_1 b_2 - a_2 b_1|$$

であるが, $a_1 > 0, a_2 > 0, b_1 > 0, b_2 < 0$ より,

$$S = \frac{1}{2} (a_2 b_1 - a_1 b_2)$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{2} (a_2 b_1 - a_1 b_2)$$

問 2

$$\log_{\frac{1}{4}} x = \frac{\log_2 x}{\log_2 \frac{1}{4}} = -\frac{1}{2} \log_2 x$$

であるから,

$$g(x) = -\frac{1}{2} \log_2 x$$

となる。S, T はそれぞれ C_1, C_2 上に存在し,

$$s \geq 1, t \geq 1$$

であるから,

$$f(s) \geq 0 \quad (\text{等号は } s=1 \text{ のとき})$$

$$g(t) \leq 0 \quad (\text{等号は } t=1 \text{ のとき})$$

となる。ただし, $s \cdot t = 8$ より, 両方の等号が同時に成立することはない。

問 1 の結果は

$$a_1 > 0, a_2 > 0, b_1 \geq 0, b_2 < 0 \quad \text{または} \quad a_1 > 0, a_2 > 0, b_1 > 0, b_2 \leq 0$$

のときも成り立つので, 問 1 における点 A を点 S, 点 B を点 T として,

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{1}{2} \left\{ (\log_2 s) t - s \left(-\frac{1}{2} \log_2 t \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} t \log_2 s + \frac{1}{4} s \log_2 t \end{aligned} \quad \cdots \textcircled{1}$$

となる。ここで,

$$s \cdot t = 8 \Leftrightarrow t = \frac{8}{s}$$

であるから, これを①式に代入して t を消去すると,

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{s} \log_2 s + \frac{1}{4} s \log_2 \frac{8}{s} \\ &= \frac{4}{s} \log_2 s + \frac{s}{4} (\log_2 8 - \log_2 s) \\ &= \frac{4}{s} \log_2 s + \frac{s}{4} (3 - \log_2 s) \\ &= \left(\frac{4}{s} - \frac{s}{4} \right) \log_2 s + \frac{3}{4} s \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad H(s) = \left(\frac{4}{s} - \frac{s}{4} \right) \log_2 s + \frac{3}{4} s$$

問 3

問 2 の結果より,

$$\begin{aligned} H(3) &= \left(\frac{4}{3} - \frac{3}{4} \right) \log_2 3 - \frac{9}{4} \\ &= \frac{7}{12} \log_2 3 + \frac{9}{4} \\ H(4) &= \left(\frac{4}{4} - \frac{4}{4} \right) \log_2 4 + 3 \\ &= 3 \end{aligned}$$

となる。したがって, 底 2 が 1 より大きいことに注意して,

$$\begin{aligned} 12 \{ H(3) - H(4) \} &= 7 \log_2 3 + 27 - 36 \\ &= 7 \log_2 3 - 9 \\ &= \log_2 3^7 - \log_2 2^9 \\ &= \log_2 \frac{3^7}{2^9} \\ &= \log_2 \frac{2187}{512} \\ &> \log_2 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

となることから,

$$H(3) > H(4)$$

であることが分かる。

$$(\text{答}) \quad H(3) > H(4)$$

Ⅲ

問 1

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}F(x) &= (2x+1)' \left\{ a(2x+1)^2 + b \right\} \\ &= 2a(2x+1)^2 + 2b\end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad 2a(2x+1)^2 + 2b$$

問 2

x は正なので,

$$\begin{aligned}G(x) &= \int_x^{2x+1} (t-x) dt - \int_{-1}^x (t-x) dt \\ &= \int_x^{2x+1} t dt - x \int_x^{2x+1} dt - \int_{-1}^x t dt + x \int_{-1}^x dt \\ &= \int_x^{2x+1} t dt - x(x+1) - \int_{-1}^x t dt + x(x+1) \\ &= \int_x^{2x+1} t dt - \int_{-1}^x t dt\end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}G(x) &= \{2 \cdot (2x+1) - 1 \cdot x\} - 1 \cdot x \\ &= 2x+2\end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad 2x+2$$

IV

問 1

まず, 1 回のゲーム A で得点 1 を得られる確率は,

$$\frac{{}_3C_3 + {}_3C_4 + {}_3C_5}{2^5} = \frac{1}{2}$$

である。よって, 1 回のゲームで得点 0 の確率は $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ である。求める確率は, 3 回のゲームで合計得点が 2 または 3 となる確率であるから,

$${}_3C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right) + {}_3C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2}$$

となる。

(答) $\frac{1}{2}$

問 2

まず, 1 回のゲーム B で得点 0 となる確率は, すべてのサイコロの目が異なる場合を考えて,

$$\frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{6^3} = \frac{5}{9}$$

よって, 1 回のゲームで得点 1 の確率は $1 - \frac{5}{9} = \frac{4}{9}$ であり, 求める確率は, 3 回のゲームで合計得点が 2 または 3 となる確率であるから,

$${}_3C_2 \left(\frac{4}{9}\right)^2 \left(\frac{5}{9}\right) + {}_3C_3 \left(\frac{4}{9}\right)^3 = \frac{304}{729}$$

となる。

(答) $\frac{304}{729}$