

I

問 1

解と係数の関係より

$$\alpha + \beta + \gamma = -A \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = -B^2 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\alpha\beta\gamma = -C \quad \dots \textcircled{3}$$

が成り立つ。

ここで

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = \frac{\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}$$

であるので、②③より

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = \frac{B^2}{C}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = \frac{B^2}{C}$$

問 2

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2} &= \frac{\alpha^2\beta^2 + \beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2}{(\alpha\beta\gamma)^2} \\ &= \frac{(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)^2 - 2(\alpha + \beta + \gamma)(\alpha\beta\gamma)}{(\alpha\beta\gamma)^2} \end{aligned}$$

であるので、①②③より

$$\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2} = \frac{B^4 - 2AC}{C^2}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2} = \frac{B^4 - 2AC}{C^2}$$

II

問1

与式を変形すると,

$$\frac{1}{10} \leq f_n(x) = 3^n \cdot x < \frac{243}{10}$$

$$\Leftrightarrow 1 = 3^0 \leq 10x \cdot 3^n < 243 = 3^5 \cdots \textcircled{1}$$

となる。ここで, $x=3$ のとき

$$3^3 < 10x = 30 < 3^4$$

であるから,

$$3^{n+3} < 10x \cdot 3^n < 3^{n+4} \cdots \textcircled{2}$$

が成り立つ。 3^n は n について単調増加するので, n が整数であることを考慮すると,

①が成り立つ条件は,

$$0 \leq n+3 \text{ かつ } n+4 \leq 5$$

$$\Leftrightarrow -3 \leq n \leq 1$$

である。

よって, 与式を満たす整数 n は $-3, -2, -1, 0, 1$ である。

(答) $n = -3, -2, -1, 0, 1$

問2

$x=3, 3.5, 4, 4.5$ のとき, いずれも

$$3^3 < 10x < 3^4$$

であるから, ②が成り立つ。よって, 問1の議論を繰り返すことにより, 与式を満たす整数 n は $-3, -2, -1, 0, 1$ であることが分かる。よって,

$$\begin{aligned} N(3) + N(3.5) + N(4) + N(4.5) &= 5 + 5 + 5 + 5 \\ &= 20 \end{aligned}$$

である。

(答) 20

Ⅲ

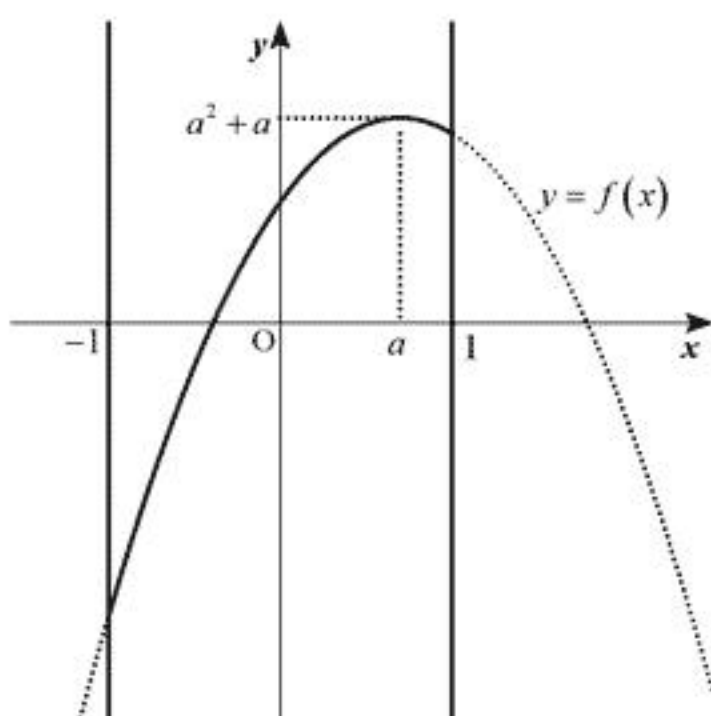
問 1

与式を平方完成すると

$$f(x) = -(x-a)^2 + a^2 + a \quad (-1 \leq x \leq 1)$$

となる。したがって、軸の位置で場合分けをして $M(a)$ を求める。

[1] $0 < a \leq 1$ のとき

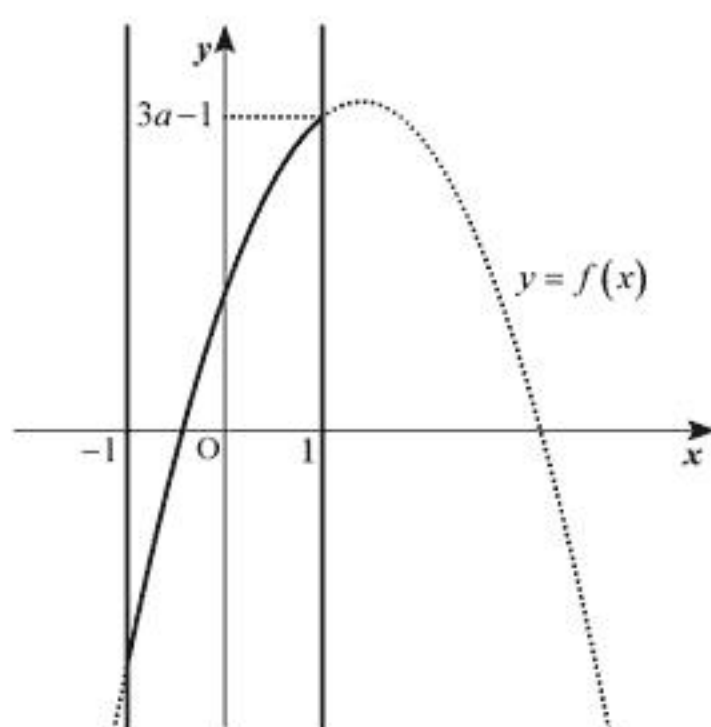


上図のように、 $-1 \leq x \leq 1$ のとき $f(x)$ は $x = a$ で最大となる。したがって、

$$M(a) = f(a) = a^2 + a$$

と求まる。

[2] $1 < a$ のとき



上図のように、 $-1 \leq x \leq 1$ のとき $f(x)$ は $x = 1$ で最大となる。したがって、

$$\begin{aligned} M(a) &= f(1) \\ &= -1^2 + 2a \cdot 1 + a \\ &= 3a - 1 \end{aligned}$$

と求まる。

[1], [2]より

$$M(a) = \begin{cases} a^2 + a & (0 < a \leq 1) \\ 3a - 1 & (1 < a) \end{cases}$$

である。

$$(\text{答}) \quad M(a) = \begin{cases} a^2 + a & (0 < a \leq 1) \\ 3a - 1 & (1 < a) \end{cases}$$

問 2

$$L(a) = M(a) - \frac{a^3}{3}$$

$$= \begin{cases} -\frac{a^3}{3} + a^2 + a & (0 < a \leq 1) \\ -\frac{a^3}{3} + 3a - 1 & (1 < a) \end{cases}$$

である。 a の値で場合分けをして $L(a)$ の最大値を求める。

[1] $0 < a \leq 1$ のとき

$$L(a) = -\frac{a^3}{3} + a^2 + a$$

であるから、

$$\begin{aligned} L'(a) &= -a^2 + 2a + 1 \\ &= -(a-1)^2 + 2 \end{aligned}$$

となる。 $0 < a \leq 1$ において $L'(a) > 0$ であるから、その範囲で $L(a)$ は単調増加する。

したがって、 $0 < a \leq 1$ のとき $L(a)$ は $a = 1$ で

$$\text{最大値: } -\frac{1}{3} + 1 + 1 = \frac{5}{3}$$

をとる。

[2] $1 < a$ のとき

$$L(a) = -\frac{a^3}{3} + 3a - 1$$

であるから、

$$L'(a) = -a^2 + 3 = -(a - \sqrt{3})(a + \sqrt{3})$$

となる。したがって、

$$\begin{aligned} L'(a) &= 0 \\ \Leftrightarrow a &= \pm\sqrt{3} \end{aligned}$$

であるから、 $1 < a$ における $L(a)$ の増減表は次のとおりである。

a	(1)	...	$\sqrt{3}$	...
$L'(a)$		+	0	-
$L(a)$		↗		↘

したがって、 $1 < a$ において $L(a)$ は $a = \sqrt{3}$ で

$$\text{最大値: } -\frac{3}{3}\sqrt{3} + 3\sqrt{3} - 1 = 2\sqrt{3} - 1$$

をとる。

[1], [2]より、 $L(a)$ は $a = \sqrt{3}$ で最大値 $2\sqrt{3} - 1$ をとる。

(答) 最大値: $2\sqrt{3} - 1$

IV

問 1

1 回目のゲームが終了したとき、X の所持する硬貨が 4 枚になるのは、1 回目のゲームで X が勝つときである。 n 枚の硬貨を投げて、表が k 枚出る確率は、

$${}_nC_k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = \frac{{}_nC_k}{2^n}$$

であるから、X、Y が出す表の枚数の確率は、それぞれ次表のようになる。

表の枚数(X)	3	2	1	0
確率	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

表の枚数(Y)	2	1	0
確率	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

この表より、X が出す表の枚数が、Y が出す表の枚数よりも多い確率は、

$$\frac{1}{8} \cdot 1 + \frac{3}{8} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) + \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

である。

(答) $\frac{1}{2}$

問 2

2 回目のゲームが終了したとき、X の所持する硬貨が 5 枚となるのは、X が 2 連勝するときである。1 回目のゲームで X が勝つと、X、Y はそれぞれ硬貨を 4 枚、1 枚持っている。このとき、2 回目のゲームで X、Y が出す表の枚数の確率は次表のようになる。

表の枚数(X)	4	3	2	1	0
確率	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$

表の枚数(Y)	1	0
確率	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

よって、2 回目のゲームで X が勝つ確率は、

$$\frac{1}{16} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{3}{8} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{13}{16}$$

である。これより、X が 2 連勝する確率は、問 1 の答を用いて

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{13}{16} = \frac{13}{32}$$

である。

(答) $\frac{13}{32}$