

I

(1)

$$\begin{aligned}\sin 3\theta &= \sin(2\theta + \theta) \\ &= \sin 2\theta \cos \theta + \cos 2\theta \sin \theta \\ &= (2 \sin \theta \cos \theta) \cos \theta + (1 - 2 \sin^2 \theta) \sin \theta \\ &= 2 \sin \theta (1 - \sin^2 \theta) + (1 - 2 \sin^2 \theta) \sin \theta \\ &= -4 \sin^3 \theta + 3 \sin \theta\end{aligned}$$

よって

$$\sin 3\theta = -4 \sin^3 \theta + 3 \sin \theta$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \sin 3\theta = -4 \sin^3 \theta + 3 \sin \theta$$

(2)

$$\frac{\pi}{5} = \theta \text{ とすると, } \sin \frac{2\pi}{5} = \sin \frac{3\pi}{5} \text{ より,}$$

$$\sin 2\theta = \sin 3\theta$$

とかける。

(1)より

$$\sin 2\theta = \sin 3\theta \Leftrightarrow 2 \sin \theta \cos \theta = -4 \sin^3 \theta + 3 \sin \theta \quad \cdots \textcircled{1}$$

となる。

$$\text{ここで } 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \text{ なので, } \sin \theta > 0, \cos \theta > 0 \text{ である。}$$

よって①は

$$2 \cos \theta = -4 \sin^2 \theta + 3 \Leftrightarrow 4 \cos^2 \theta - 2 \cos \theta - 1 = 0$$

とできる。

よって, この 2 次方程式を解いて

$$\cos \theta = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{4}$$

となるが, $\sin \theta > 0, \cos \theta > 0$ より,

$$\cos \theta = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$$

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{1 - \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{8}}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \cos \frac{\pi}{5} = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}, \quad \sin \frac{\pi}{5} = \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{8}}$$

(3)

積和の公式より

$$\begin{aligned}\sin \frac{4\pi}{5} \sin \frac{\pi}{5} &= \frac{1}{2} \left\{ \cos \left(\frac{4\pi}{5} - \frac{\pi}{5} \right) - \cos \left(\frac{4\pi}{5} + \frac{\pi}{5} \right) \right\} \\ &= \frac{\cos \frac{3\pi}{5} + 1}{2}\end{aligned}$$

となる。

同様に

$$\begin{aligned}\sin \frac{3\pi}{5} \sin \frac{2\pi}{5} &= \frac{1}{2} \left\{ \cos \left(\frac{3\pi}{5} - \frac{2\pi}{5} \right) - \cos \left(\frac{3\pi}{5} + \frac{2\pi}{5} \right) \right\} \\ &= \frac{\cos \frac{\pi}{5} + 1}{2}\end{aligned}$$

となる。

ここで

$$\begin{aligned}\frac{\cos \frac{3\pi}{5} + 1}{2} &= \frac{1}{2} \left(\cos \left(\pi - \frac{2\pi}{5} \right) \right) + \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{2\pi}{5} \right) \\ &= \sin^2 \frac{\pi}{5}\end{aligned}$$

である。

以上より,

$$\sin \frac{\pi}{5} \sin \frac{2\pi}{5} \sin \frac{3\pi}{5} \sin \frac{4\pi}{5} = \frac{\cos \frac{\pi}{5} + 1}{2} \cdot \sin^2 \frac{\pi}{5}$$

である。

よって(2)より

$$\begin{aligned}\sin \frac{\pi}{5} \sin \frac{2\pi}{5} \sin \frac{3\pi}{5} \sin \frac{4\pi}{5} &= \frac{\frac{1 + \sqrt{5}}{4} + 1}{2} \cdot \left(\sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{8}} \right)^2 \\ &= \frac{5 + \sqrt{5}}{8} \cdot \frac{5 - \sqrt{5}}{8} \\ &= \frac{5}{16}\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{5}{16}$$

Ⅱ

(1)

α の 3 次方程式

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= f(x) \\ \Leftrightarrow \alpha^3 - 3b^2\alpha &= x^3 - 3b^2x \\ \Leftrightarrow \alpha^3 - 3b^2\alpha - x^3 + 3b^2x &= 0 \\ \Leftrightarrow (\alpha - x)(\alpha^2 + x\alpha + x^2 - 3b^2) &= 0 \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

について考える。

$$\alpha^2 + x\alpha + x^2 - 3b^2 = 0$$

を α の 2 次方程式と見たときの判別式を D とすると、

$$\begin{aligned} D &= x^2 - 4(x^2 - 3b^2) \\ &= 12b^2 - 3x^2 \\ &= -3(x - 2b)(x + 2b) \end{aligned}$$

であるから、 α の 3 次方程式①は、

$$|x| > 2b \text{ のとき、} \alpha = x \text{ の 1 つの実数解} \cdots \textcircled{2}$$

$$|x| \leq 2b \text{ のとき、} \alpha = x, \frac{-x \pm \sqrt{12b^2 - 3x^2}}{2} \text{ の 3 つの実数解 (重解を含む)} \cdots \textcircled{3}$$

をもつ。

[1] $x = -b$ のとき

方程式①の 3 解は、③より

$$\alpha = -b, -b, 2b$$

であるから、 $f(\alpha) = f(x)$ を満たす最大の α は $\alpha = 2b$ となる ($\because b > 0$)。よって、

$$F(-b) = 2b - (-b) = 3b$$

である。

[2] $x = 0$ のとき

方程式①の 3 解は、③より

$$\alpha = -\sqrt{3}b, 0, \sqrt{3}b$$

であるから、 $f(\alpha) = f(x)$ を満たす最大の α は $\alpha = \sqrt{3}b$ となる。よって、

$$F(0) = \sqrt{3}b - 0 = \sqrt{3}b$$

である。

[3] $x = b$ のとき

方程式①の 3 解は、③より

$$\alpha = -2b, b, b$$

であるから、 $f(\alpha) = f(x)$ を満たす最大の α は $\alpha = b$ となる。よって、

$$F(b) = b - b = 0$$

である。

$$(\text{答}) \quad F(-b) = 3b, F(0) = \sqrt{3}b, F(b) = 0$$

(2)

まず、 $|x| > 2b$ のときを考えると、②より、 $f(\alpha) = f(x)$ を満たす α は x しかないので、

$$F(x) = \alpha - x = x - x = 0$$

となる。つまり、 $x < -2b, x > 2b$ のとき $F(x) = 0$ となる。

以下、 $|x| \leq 2b$ のときを考える。 $F(x) = 0$ となるのは、方程式①の最大解 α が x となるときで

あるから、

$$x \geq \frac{-x + \sqrt{12b^2 - 3x^2}}{2} \Leftrightarrow 3x \geq \sqrt{12b^2 - 3x^2}$$

を満たせばよい。ここで、 x は正でないとき成り立たない事が分かるので、 $0 \leq x \leq 2b$ を考える。

と、

$$\begin{aligned} 3x \geq \sqrt{12b^2 - 3x^2} &\Leftrightarrow 9x^2 \geq 12b^2 - 3x^2 \quad (\square \text{両辺非負}) \\ &\Leftrightarrow x^2 \geq b^2 \\ &\Leftrightarrow x \geq b \quad (\square \text{両辺非負}) \end{aligned}$$

であるから、 $b \leq x \leq 2b$ のとき $F(x) = 0$ が成り立つことがわかる。

以上より、 $F(x) = 0$ となる x の範囲は

$$x < -2b, b \leq x$$

である。また、 $F(x) > 0$ となるのは $F(x) = 0$ とならないときなので、

$$-2b \leq x < b$$

のときである。

$$(\text{答}) \quad F(x) = 0 \text{ となる } x \text{ の範囲: } x < -2b, b \leq x$$

$$F(x) > 0 \text{ となる } x \text{ の範囲: } -2b \leq x < b$$

(3)

$-2b \leq x < b$ のとき、

$$\frac{-x + \sqrt{12b^2 - 3x^2}}{2} \geq \frac{-x - \sqrt{12b^2 - 3x^2}}{2}$$

なので、方程式①の最大解となる α のは

$$\alpha = \frac{-x + \sqrt{12b^2 - 3x^2}}{2}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \alpha = \frac{-x + \sqrt{12b^2 - 3x^2}}{2}$$

(4)

$x < -2b, b \leq x$ のとき、(2)より、 $F(x) = 0$ である。

また、 $-2b \leq x < b$ のとき、(3)より、

$$\begin{aligned} F(x) &= \alpha - x \\ &= \frac{-x + \sqrt{12b^2 - 3x^2}}{2} - x \\ &= \frac{-3x + \sqrt{12b^2 - 3x^2}}{2} \end{aligned}$$

となる。

$-2b < x < b$ のとき、グラフの概形を求めるために $F(x)$ を微分すると、

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{1}{2} \left\{ -3 + \frac{1}{2} (12b^2 - 3x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-6x) \right\} \\ &= -\frac{3}{2} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{12b^2 - 3x^2}} \right) \end{aligned}$$

となる。

[1] $0 \leq x < b$ のとき

$$\frac{x}{12b^2 - 3x^2} \geq 0$$

が常に成り立つので、 $F'(x) < 0$ である。

[2] $-2b \leq x < 0$ のとき

$x < 0$ より、

$$\begin{aligned} F'(x) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow 1 + \frac{x}{\sqrt{12b^2 - 3x^2}} &\leq 0 \\ \Leftrightarrow \frac{12b^2 - 3x^2}{\sqrt{12b^2 - 3x^2}} &\leq -x \\ \Leftrightarrow \sqrt{12b^2 - 3x^2} &\leq x^2 \\ \Leftrightarrow x^2 &\geq 3b^2 \\ \Leftrightarrow -x &\geq \sqrt{3}b \\ \Leftrightarrow x &\leq -\sqrt{3}b \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{cases} -2b < x < -\sqrt{3}b \text{ のとき} & F'(x) > 0 \\ x = -\sqrt{3}b \text{ のとき} & F'(x) = 0 \\ -\sqrt{3}b < x < 0 \text{ のとき} & F'(x) < 0 \end{cases}$$

となる。

これと、

$$F(-2b) = \frac{-3(-2b) + \sqrt{12b^2 - 3(-2b)^2}}{2} = 3b$$

$$F(-\sqrt{3}b) = \frac{-3(-\sqrt{3}b) + \sqrt{12b^2 - 3(-\sqrt{3}b)^2}}{2} = 2\sqrt{3}b$$

$$\lim_{x \rightarrow -2b+0} F'(x) = \lim_{x \rightarrow -2b+0} \left\{ -\frac{3}{2} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{12b^2 - 3x^2}} \right) \right\} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow b-0} F'(x) = \lim_{x \rightarrow b-0} \left\{ -\frac{3}{2} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{12b^2 - 3x^2}} \right) \right\} = -2$$

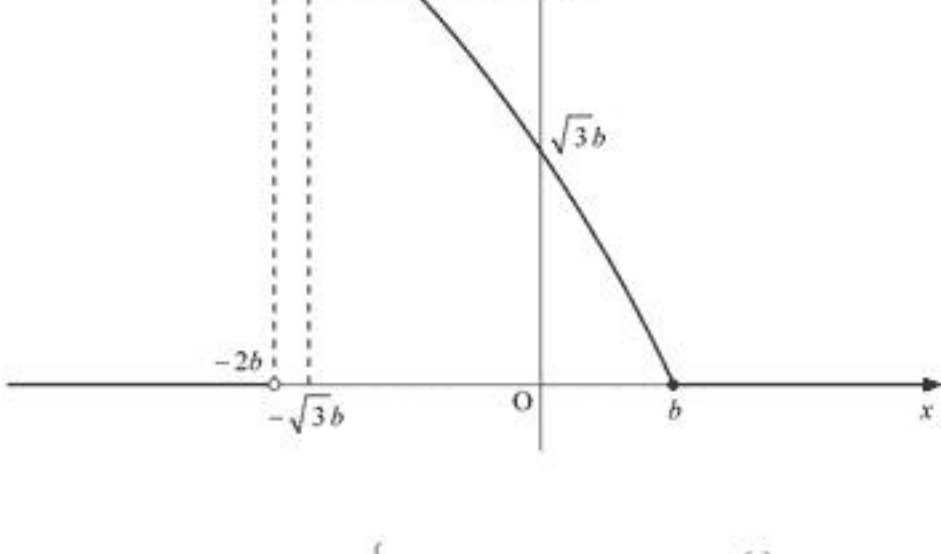
から、 $-2b \leq x < b$ における $F(x)$ の増減は下表ようになる。

x	$-2b$	$\cdots$	$-\sqrt{3}b$	$\cdots$	(b)
$F'(x)$	$+\infty$	$+$	0	$-$	(-2)
$F(x)$	$3b$	$\square$	$2\sqrt{3}b$	$\square$	(0)

よって、以上より、 $y = F(x)$ のグラフの概形は下図のようになり、その最大値は

$$F(-\sqrt{3}b) = 2\sqrt{3}b$$

である。



(答)

$$\begin{cases} x < -2b, b \leq x \text{ のとき} & F(x) = 0 \\ -2b \leq x < b \text{ のとき} & F(x) = \frac{-3x + \sqrt{12b^2 - 3x^2}}{2} \end{cases}$$

前図、最大値: $2\sqrt{3}b$

III

(1)

CD=2 より、

$$\begin{aligned}h^2+h^2+(2d)^2 &= 4 \\ \Leftrightarrow h^2 &= 2(1-d^2) \\ \therefore h &= \sqrt{2(1-d^2)} \quad (\because h>0)\end{aligned}$$

である。また、 $h>0$ であるから、

$$2(1-d^2)>0$$

$$\therefore 0 \leq d < 1 \quad (\because b \geq 0)$$

と求まる。

$$(\text{答}) h = \sqrt{2(1-d^2)}, \quad 0 \leq d < 1$$

(2)

$\overline{\text{CR}}$ は平面 ABD = yz 平面に垂直であり、点 R は直線 AB 上にあるので、

$$\text{R}(0, 0, -d)$$

である。

また、 $\overline{\text{DS}}$ は平面 ABC = xz 平面に垂直であり、点 S は直線 AB 上にあるので、

$$\text{S}(0, 0, d)$$

である。

次に点 P, Q の座標を求める。ここで、

$$\text{AB} = \text{CD}, \text{AC} = \text{BD}, \text{AD} = \text{BC}$$

より、四面体 ABCD = 四面体 CDAB である。よって、

$$\begin{cases} \overline{\text{OR}} = d \overline{\text{OB}} \\ \overline{\text{OS}} = d \overline{\text{OA}} \end{cases}$$

より、点 C, D の中点を M とすると、四面体 ABCD = 四面体 CDAB より、

$$\begin{cases} \overline{\text{MP}} = d \overline{\text{MD}} \\ \overline{\text{MQ}} = d \overline{\text{MC}} \end{cases}$$

が成り立つ。よって、

$$\begin{cases} \overline{\text{OP}} = d \overline{\text{OD}} + (1-d) \overline{\text{OM}} \\ \overline{\text{OQ}} = d \overline{\text{OC}} + (1-d) \overline{\text{OM}} \end{cases}$$

と表せる。ここで、 $\overline{\text{OM}} = \left(\frac{h}{2}, \frac{h}{2}, 0 \right)$ であるから、

$$\begin{aligned}\overline{\text{OP}} &= d \begin{pmatrix} 0 \\ h \\ d \end{pmatrix} + (1-d) \begin{pmatrix} \frac{h}{2} \\ \frac{h}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-d)\frac{h}{2} \\ (1+d)\frac{h}{2} \\ d^2 \end{pmatrix} \\ \overline{\text{OQ}} &= d \begin{pmatrix} h \\ 0 \\ -d \end{pmatrix} + (1-d) \begin{pmatrix} \frac{h}{2} \\ \frac{h}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+d)\frac{h}{2} \\ (1-d)\frac{h}{2} \\ -d^2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

となる。上の式に(1)の結果を代入すると、

$$\begin{aligned}\text{P} &\left(\frac{(1-d)}{2}, \frac{(1+d)}{2}, d^2 \right) \\ \text{Q} &\left(\frac{(1+d)}{2}, \frac{(1-d)}{2}, -d^2 \right)\end{aligned}$$

と求まる。したがって、

$$\begin{aligned}\overline{\text{AP}} \cdot \overline{\text{BQ}} &= \begin{pmatrix} (1-d)\frac{h}{2} \\ (1+d)\frac{h}{2} \\ d^2-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (1+d)\frac{h}{2} \\ (1-d)\frac{h}{2} \\ -d^2+1 \end{pmatrix} \\ &= 2(1-d^2) \cdot \frac{h^2}{4} - (d^2-1)^2 \\ &= 2(1-d^2) \cdot \frac{2}{4}(1-d^2) - (d^2-1) \\ &= 0\end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \text{R}(0, 0, -d), \text{S}(0, 0, d)$$

$$\begin{aligned}\text{P} &\left(\frac{(1-d)\sqrt{1-d^2}}{\sqrt{2}}, \frac{(1+d)\sqrt{1-d^2}}{\sqrt{2}}, d^2 \right) \\ \text{Q} &\left(\frac{(1+d)\sqrt{1-d^2}}{\sqrt{2}}, \frac{(1-d)\sqrt{1-d^2}}{\sqrt{2}}, -d^2 \right)\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}\text{BD}^2 &= h^2 + (d+1)^2 \\ &= 2(1-d^2) + (d^2+2d+1) \\ &= -d^2 + 2d + 3 \\ &= -(d-1)^2 + 4\end{aligned}$$

である。よって、 $0 \leq d < 1$ より、

$$\sqrt{3} \leq \text{BD} < 2$$

である。

$$(\text{答}) \sqrt{3} \leq \text{BD} < 2$$

(4)

平面 ABC, ACD に垂直な直線はそれぞれ $\overline{\text{DS}}$, $\overline{\text{BQ}}$ である。したがって、

$$\cos \theta = \frac{|\overline{\text{DS}} \cdot \overline{\text{BQ}}|}{|\overline{\text{DS}}| |\overline{\text{BQ}}|}$$

となる。ここで、対称性より、

$$|\overline{\text{BQ}}| = |\overline{\text{DS}}| = h$$

である。

$$\overline{\text{BQ}} = \begin{pmatrix} (1+d)\frac{h}{2} \\ (1-d)\frac{h}{2} \\ -d^2+1 \end{pmatrix}, \quad \overline{\text{DS}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -h \\ 0 \end{pmatrix}$$

であるから、

$$\cos \theta = \frac{|(-h) \cdot (1-d)\frac{h}{2}|}{h^2} = \frac{1-d}{2}$$

となる。 $0 \leq d < 1$ であるから、

$$0 < \cos \theta \leq \frac{1}{2}$$

となるので、 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ に注意すると、

$$\frac{\pi}{3} \leq \theta < \frac{\pi}{2}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \frac{\pi}{3} \leq \theta < \frac{\pi}{2}$$

IV

(1)

$0 < x \leq 1$ のとき

$$0 \leq \log \frac{1}{x}$$

であるから、 $\log \frac{1}{x}$ は 0 以上の全ての実数をとる。したがって、 $f(x)=0$ を満たすとき、0 以上の整数 n を用いて

$$\log \frac{1}{x} = n\pi \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

と表せる。上式を変形すると、

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} &= e^{n\pi} \\ \therefore x &= e^{-n\pi} \quad (n=0, 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

と求まる。以上より、

$$a_n = e^{-n\pi} \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

である。

(答) $a_n = e^{-n\pi}$

(2)

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dx} (Ae^{-ax} \cos bx + Be^{-ax} \sin bx) \\ &= -aAe^{-ax} \cos bx - bAe^{-ax} \sin bx - aBe^{-ax} \sin bx + bBe^{-ax} \cos bx \\ &= (-aA + bB)e^{-ax} \cos bx + (-bA - aB)e^{-ax} \sin bx \end{aligned}$$

と計算できる。これが任意の x について $e^{-ax} \cos bx$ に等しいので、

$$\begin{cases} -aA + bB = 1 \\ -bA - aB = 0 \end{cases}$$

である。これを A, B について解くと、

$$(A, B) = \left(-\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{b}{a^2 + b^2} \right)$$

と求まる。したがって、

$$\begin{aligned} \int e^{-ax} \cos bx \, dx &= Ae^{-ax} \cos bx + Be^{-ax} \sin bx + C \\ &= -\frac{a}{a^2 + b^2} e^{-ax} \cos bx + \frac{b}{a^2 + b^2} e^{-ax} \sin bx + C \quad (C \text{ は積分定数}) \end{aligned}$$

となる。

$$(答) \quad (A, B) = \left(-\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{b}{a^2 + b^2} \right)$$

$$\int e^{-ax} \cos bx \, dx = -\frac{a}{a^2 + b^2} e^{-ax} \cos bx + \frac{b}{a^2 + b^2} e^{-ax} \sin bx + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

(3)

$$b_n = \int_{e^{-n\pi}}^{e^{-n\pi}} \left\{ f(x) \right\}^2 dx = \int_{e^{-(n+1)\pi}}^{e^{-n\pi}} \sin^2 \left(\log \frac{1}{x} \right) dx$$

である。 $t = \log \frac{1}{x}$ とおくと、

$$\begin{array}{c|c} x = e^{-t} & \\ dx = -e^{-t} dt & \end{array} \quad \begin{array}{c|c} x & \\ t & \end{array} \quad \begin{array}{c} e^{-(n+1)\pi} \rightarrow e^{-n\pi} \\ (n+1)\pi \rightarrow n\pi \end{array}$$

であるから、

$$b_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-t} \sin^2 t \, dt$$

となる。ここで、半角の公式より、

$$\sin^2 t = \frac{1 - \cos 2t}{2}$$

であるから、

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{2} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-t} (1 - \cos 2t) \, dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-t} \, dt - \frac{1}{2} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-t} \cos 2t \, dt \end{aligned}$$

となる。(3)の答えに $(a, b) = (1, 2)$ を代入して上式の第 2 項に適用すると、

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{2} \left[-e^{-t} \right]_{n\pi}^{(n+1)\pi} - \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{5} e^{-t} \cos 2t + \frac{2}{5} e^{-t} \sin 2t \right]_{n\pi}^{(n+1)\pi} \\ &= \frac{1}{2} (-e^{-(n+1)\pi} + e^{-n\pi}) - \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{5} e^{-(n+1)\pi} + 0 + \frac{1}{5} e^{-n\pi} - 0 \right) \\ &= \frac{2}{5} (e^{-n\pi} - e^{-(n+1)\pi}) \end{aligned}$$

と求まる。

$$(答) b_n = \frac{2}{5} (e^{-n\pi} - e^{-(n+1)\pi})$$

(4)

(3)の結果より、

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n b_i &= \frac{2}{5} \left\{ (e^0 - e^{-\pi}) + (e^{-\pi} - e^{-2\pi}) + \dots + (e^{-n\pi} - e^{-(n+1)\pi}) \right\} \\ &= \frac{2}{5} (1 - e^{-(n+1)\pi}) \\ &\rightarrow \frac{2}{5} \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

と求まる。

$$(答) \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \frac{2}{5}$$