

I

〔解答〕

- (1) $\frac{2-a}{3} \leq x \leq \frac{a+2}{3}$ (2) $b = a^2 + 2a$ (3) $\frac{37}{40}$
 (4) 0.41 (5) $3-2x$ (6) 極大値 7, 極小値 -20

〔解説〕

(1)

与えられた不等式を解くと

$$\begin{aligned} |3x-2| &\leq a \\ \Leftrightarrow -a &\leq 3x-2 \leq a \\ \therefore \frac{2-a}{3} &\leq x \leq \frac{a+2}{3} \end{aligned}$$

と求まる。

(2)

与えられた 2 次関数を平方完成すると

$$y = \{x-(a+2)\}^2 + b - (a+2)^2$$

となる。したがって頂点の座標は

$$(a+2, b-(a+2)^2)$$

となる。これが直線 $y = -2x$ 上を動くことより、

$$\begin{aligned} b-(a+2)^2 &= -2(a+2) \\ \Leftrightarrow b &= a^2 + 4a + 4 - 2a - 4 \\ \therefore b &= a^2 + 2a \end{aligned}$$

と求まる。

(3)

$\triangle ABC$ において余弦定理より

$$\begin{aligned} \cos B &= \frac{4^2 + 5^2 - 2^2}{2 \cdot 4 \cdot 5} \\ &= \frac{37}{40} \end{aligned}$$

と求まる。

(4)

1 回矢を射たときに的に当たる確率を $p = 0.1$ とする。このとき 5 回射たときに一度も当たらない確率は、

$$(1-p)^5$$

である。求める確率は、この余事象の確率であるので、

$$\begin{aligned} 1-(1-p)^5 &= 1-(0.9)^5 \\ &= 0.40951 \end{aligned}$$

となる。したがって小数第 3 位を四捨五入して、

$$0.41$$

と求まる。

(5)

対数の定義より

$$\begin{aligned} \log_{10} y &= \log_{10} 10^{3-2x} \\ &= 3-2x \end{aligned}$$

となる。

(6)

$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x$ とおく。このとき

$$\begin{aligned} f'(x) &= 6x^2 - 6x - 12 \\ &= 6(x-2)(x+1) \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= -1, 2 \end{aligned}$$

となる。したがって、 $f(x)$ の増減表は下記のとおりである。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\square$		$\square$		$\square$

$$\begin{aligned} f(-1) &= 2 \cdot (-1) - 3 \cdot 1 - 12 \cdot (-1) = 7 \\ f(2) &= 2 \cdot 8 - 3 \cdot 4 - 12 \cdot 2 = -20 \end{aligned}$$

であるから、 $f(x)$ は、

$$x = -1 \text{ のとき、極大値 } 7$$

$$x = 2 \text{ のとき、極小値 } -20$$

をとる。

II

(1)

$$\vec{a} = (1, 0), \vec{b} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{より,}$$

$$|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = 1, \vec{a} \cdot \vec{b} = -\frac{1}{2}$$

である。したがって、

$$\begin{aligned} |m\vec{a} + n\vec{b}|^2 &= m^2|\vec{a}|^2 + n^2|\vec{b}|^2 + 2mn\vec{a} \cdot \vec{b} \\ &= m^2 + n^2 - mn \end{aligned}$$

$$\therefore |m\vec{a} + n\vec{b}| = \sqrt{m^2 + n^2 - mn}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad |m\vec{a} + n\vec{b}| = \sqrt{m^2 + n^2 - mn}$$

(2)

$$\vec{OA} = 2\vec{a} + 2\vec{b}$$

であるので、3回さいころを振ったとき、点A $(1, \sqrt{3})$ に到達するのは、点Pが $\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} + \vec{b}$ に沿って1回ずつ進むときである。条件より、点Pが $\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} + \vec{b}$ に沿って進む確率はいずれも $\frac{1}{3}$

である。したがって求める確率は

$$\left(\frac{1}{3}\right)^3 \times 3! = \frac{2}{9}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{2}{9}$$

(3)

3回とも同じベクトルに沿って進むとき、点Pは、

$$(3, 0), \left(-\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right), \left(\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$$

のいずれかの点に移動し、その点に進む確率はいずれも

$$\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$$

である。またいずれの場合でも $|\vec{OP}|$ の大きさは3である。

3回のうち2回同じベクトルに沿って進み、他の1回は異なるベクトルに沿って進むとき、点Pは

$$3\vec{a} + \vec{b}, 2\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} + 3\vec{b}, \vec{a} + 2\vec{b}, 3\vec{a} + 2\vec{b}, 2\vec{a} + 3\vec{b}$$

のいずれかの点にあり、それぞれの点に進む確率は

$$\left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \frac{3!}{2!} = \frac{1}{9}$$

である。またそれぞれの場合において、 $|\vec{OP}|$ の大きさは、(1)の結果より、

$$\sqrt{7}, \sqrt{3}, \sqrt{7}, \sqrt{3}, \sqrt{7}, \sqrt{7}$$

である。

3回のうち3回とも異なるベクトルに沿って進むとき、このようになる確率は、(2)の結果より

$$\frac{2}{9}$$

であり、 $|\vec{OP}|$ の大きさは

$$\sqrt{4} = 2$$

である。したがって、 $|\vec{OP}|$ の大きさと確率の関係は下表のようになる。

$ \vec{OP} $	$\sqrt{3}$	2	$\sqrt{7}$	3
確率	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$

以上より、求める期待値は、

$$\frac{2}{9} \cdot \sqrt{3} + \frac{2}{9} \cdot 2 + \frac{4}{9} \cdot \sqrt{7} + \frac{1}{9} \cdot 3 = \frac{1}{9} (2\sqrt{3} + 4\sqrt{7} + 7)$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{9} (2\sqrt{3} + 4\sqrt{7} + 7)$$

Ⅲ

(1)

$$AB = \sqrt{(0-4)^2 + \{3-(-1)\}^2 + (5-5)^2} = 4\sqrt{2}$$

$$BC = \sqrt{(4-0)^2 + (3-3)^2 + (1-5)^2} = 4\sqrt{2}$$

$$CA = \sqrt{(4-4)^2 + (-1-3)^2 + (5-1)^2} = 4\sqrt{2}$$

より, 3 辺が等しいので, $\triangle ABC$ は正三角形である。

(証明終)

(2)

$$\left(\frac{4+0+4}{3}, \frac{-1+3+3}{3}, \frac{5+5+1}{3} \right) = \left(\frac{8}{3}, \frac{5}{3}, \frac{11}{3} \right)$$

より,

$$G\left(\frac{8}{3}, \frac{5}{3}, \frac{11}{3}\right)$$

である。

$$(\text{答}) \ G\left(\frac{8}{3}, \frac{5}{3}, \frac{11}{3}\right)$$

(3)

$$\overrightarrow{GP} = \left(t - \frac{8}{3}, t - \frac{8}{3}, t - \frac{8}{3} \right)$$

$$= \left(t - \frac{8}{3} \right) (1, 1, 1)$$

$$\overrightarrow{GA} = \left(\frac{4}{3}, -\frac{8}{3}, \frac{4}{3} \right)$$

$$= \frac{4}{3} (1, -2, 1)$$

$$\overrightarrow{GB} = \left(-\frac{8}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3} \right)$$

$$= \frac{4}{3} (-2, 1, 1)$$

$$\overrightarrow{GC} = \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{8}{3} \right)$$

$$= \frac{4}{3} (1, 1, -2)$$

であることから,

$$\overrightarrow{GP} \cdot \overrightarrow{GA} = 0$$

$$\overrightarrow{GP} \cdot \overrightarrow{GB} = 0$$

$$\overrightarrow{GP} \cdot \overrightarrow{GC} = 0$$

とわかる。よって, $\overrightarrow{GP}$ は $\overrightarrow{GA}$, $\overrightarrow{GB}$, $\overrightarrow{GC}$ と垂直である。

(証明終)

(4)

(3)より,

$$\angle PGA = \angle PGB = \angle PGC = 90^\circ$$

である。また, $\triangle ABC$ は正三角形であるので $GA = GB = GC$ であることも考えると

$$\triangle PGA \equiv \triangle PGB \equiv \triangle PGC$$

と言えるので,

$$PA = PB = PC$$

である。よって, 3 点 A, B, C を通る半径 PA の球面の中心は点 P とわかる。この球面の半径が 12 となるとき,

$$(t-4)^2 + t^2 + (t-4)^2 = 12^2$$

$$\Leftrightarrow 3t^2 - 16t - 112 = 0$$

$$\Leftrightarrow (t+4)(3t-28) = 0$$

$$\therefore t = -4, \frac{28}{3}$$

となるから, 求める方程式は

$$(x+4)^2 + (y+5)^2 + (z+3)^2 = 144$$

$$\left(x - \frac{28}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{25}{3}\right)^2 + \left(z - \frac{31}{3}\right)^2 = 144$$

である。

$$(\text{答}) \ (x+4)^2 + (y+5)^2 + (z+3)^2 = 144, \left(x - \frac{28}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{25}{3}\right)^2 + \left(z - \frac{31}{3}\right)^2 = 144$$