

I

(1)

$$\begin{aligned}
 x^2 - (3a+2)x + 2a^2 + a - 3 &= 0 \\
 \Leftrightarrow x^2 - (3a+2)x + (2a+3)(a-1) &= 0 \\
 \Leftrightarrow (x-2a-3)(x-a+1) &= 0
 \end{aligned}$$

より、 $x=2a+3, a-1$ となる。

(答) $x=2a+3, a-1$

(2)

$$x^2 - 2(k-1)x + 2k^2 - 3k + 4 = (x-k+1)^2 + k^2 - k + 3$$

より、頂点は $(k-1, k^2-k+3)$ となる。

$(X, Y) = (k-1, k^2-k+3)$ とすると、 $k=X+1$ なので、

$$Y = (X+1)^2 - (X+1) + 3 = X^2 + X + 3$$

となる。

よって、与式のグラフの頂点の軌跡は、 $y=x^2+x+3$ となる。

(答) $y=x^2+x+3$

(3)

$\sqrt{40}$ の辺に挟まれた角を $\angle A$ とすると、余弦定理より、

$$\cos \angle A = \frac{\sqrt{40}^2 + \sqrt{40}^2 - 4^2}{2 \cdot \sqrt{40} \cdot \sqrt{40}} = \frac{4}{5}$$

となる。

$\angle A < 180^\circ$ より、

$$\sin \angle A = \sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{3}{5}$$

となる。

よって、正弦定理より、

$$2R = \frac{4}{\sin \angle A} \Leftrightarrow R = \frac{10}{3}$$

となる。

(答) $R = \frac{10}{3}$

(4)

s が3つ、 t が3つ、 i が2つ、 a, c が1つずつあるので、

$${}_{10}C_3 \cdot {}_7C_3 \cdot {}_4C_2 \cdot {}_2C_1 = 120 \cdot 35 \cdot 6 \cdot 2 = 50400$$

通りの並べ方がある。

(答) 50400

(5)

$$\log_{10} \frac{2}{3} = a \Leftrightarrow 3a = \log_{10} \left(\frac{2}{3}\right)^3$$

であるので、

$$10^{3a} = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$$

となる。

(答) $\frac{8}{27}$

(6)

$y=-x^2+2x, y=x^2$ の交点は、

$$x^2 = -x^2 + 2x \Leftrightarrow 2x(x-1) = 0 \Leftrightarrow x=0, 1$$

となる。

よって、

$$\int_0^1 \{(-x^2+2x) - (x^2)\} dx = \left[-\frac{2}{3}x^3 + x^2 \right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

となる。

(答) $\frac{1}{3}$

II

(1)

$$f'(x) = 3ax^2 + 2x - 8$$

であり、 $x=1$ で極値を持つということから、

$$f'(1) = 0 \Leftrightarrow 3a - 6 = 0 \Leftrightarrow a = 2$$

となる。逆に $a=2$ のとき、

$$\begin{aligned} f'(x) &= 6x^2 + 2x - 8 \\ &= 2(3x+4)(x-1) \end{aligned}$$

となるので、 $x=1$ で極値をもつ。

(答) $a=2$

(2)

$a=2$ より、

$$f'(x) = 6x^2 + 2x - 8 = 2(3x+4)(x-1)$$

となる。

よって、増減表は以下のようになる。

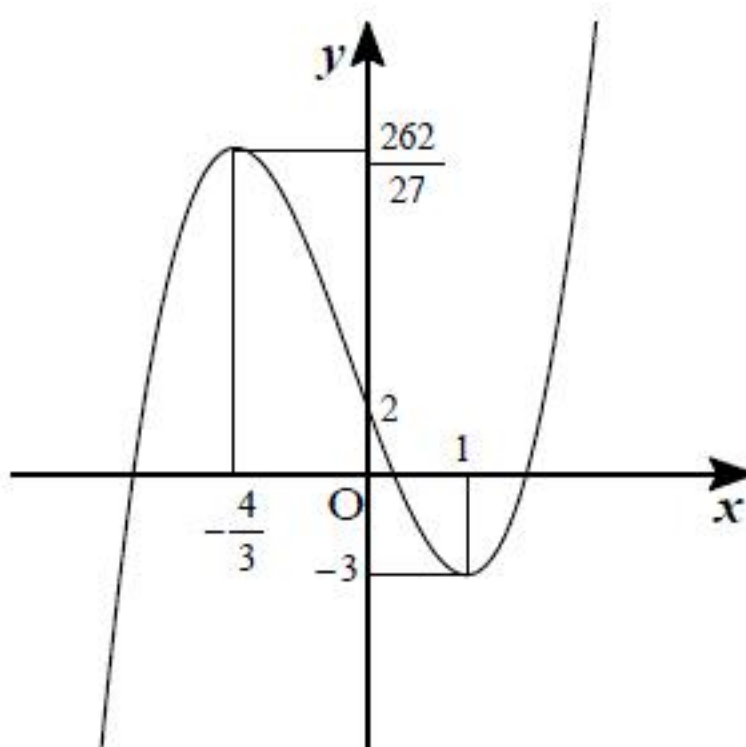
x		$-\frac{4}{3}$		1	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	$\frac{262}{27}$	$\searrow$	-3	$\nearrow$

よって、極大値は $f\left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{262}{27}$ 、極小値は $f(1) = -3$ となる。

(答) 極大値 $\frac{262}{27}$ ，極小値 -3

(3)

グラフは以下のようになる。



よって、 $f(x)=k$ が相異なる3つの実数解をもつのは

$$-3 < k < \frac{262}{27}$$

のときである。

(答) $-3 < k < \frac{262}{27}$

(4)

(3)のグラフから、 $f(x)=k$ が相異なる2つの正の解と、1つの負の解をもつのは

$$-3 < k < 2$$

のときである。

(答) $-3 < k < 2$

Ⅲ

(1)

$\triangle APC$ において、余弦定理より

$$\begin{aligned}CP^2 &= 1^2 + t^2 - 2 \cdot 1 \cdot t \cos 60^\circ \\ &= t^2 - t + 1\end{aligned}$$

である。よって

$$\begin{aligned}S &= CP \times PQ \\ &= \sqrt{t^2 - t + 1}\end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad S = \sqrt{t^2 - t + 1}$$

(2)

$$\triangle APC = \frac{1}{2} AP \cdot AC \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4} t$$

であるから、立体 $APC-DQF$ 、立体 $D-APC$ の体積は順に

$$\frac{\sqrt{3}}{4} t, \frac{\sqrt{3}}{12} t$$

と求まる。よって

$$\begin{aligned}V &= \frac{\sqrt{3}}{4} t - \frac{\sqrt{3}}{12} t \\ &= \frac{\sqrt{3}}{6} t\end{aligned}$$

である。ここで、

$$V = \frac{1}{3} S \cdot L \Leftrightarrow L = \frac{3V}{S}$$

という関係が成り立つから

$$L = \frac{\sqrt{3} t}{2\sqrt{t^2 - t + 1}}$$

とわかる。

$$(\text{答}) \quad L = \frac{\sqrt{3} t}{2\sqrt{t^2 - t + 1}}, V = \frac{\sqrt{3}}{6} t$$