

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{11}$$

$$\Leftrightarrow 11n + 11m = mn \quad (\because m \neq 0, n \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow mn - 11m - 11n = 0$$

$$\Leftrightarrow m(n-11) - 11(n-11) - 11^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (m-11)(n-11) = 11^2$$

となる。 m, n はいずれも 0 でない整数で、 $m \leq n$ であるから、

$m-11, n-11$ は整数、

$m-11 \leq n-11$,

$(m-11, n-11) \neq (-11, -11)$

である。したがって、

$$(m-11, n-11) = (-121, -1), (1, 121), (11, 11)$$

$$\therefore (m, n) = (-110, 10), (12, 132), (22, 22)$$

となる。

(答) $(m, n) = (-110, 10), (12, 132), (22, 22)$

II

問 1

$\triangle ABC$ において余弦定理により,

$$\cos \angle ABC = \frac{a^2 + b^2 - b^2}{2ab} = \frac{a}{2b}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{a}{2b}$$

問 2

$\triangle ABC$ において正弦定理により,

$$2r = \frac{b}{\sin \angle ABC} = \frac{b}{\sqrt{1 - \left(\frac{a}{2b}\right)^2}} = \frac{2b^2}{\sqrt{4b^2 - a^2}}$$

$$\therefore r = \frac{b^2}{\sqrt{4b^2 - a^2}}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{b^2}{\sqrt{4b^2 - a^2}}$$

問 3

線分 BC の中点を M とすると,

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AC}$$

となる。3 点 A, O, M はこの順に一直線上にあり,

AM の長さは

$$\sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{4b^2 - a^2}$$

となるので,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AO} &= \frac{|\overrightarrow{AO}|}{|\overrightarrow{AM}|} \overrightarrow{AM} \\ &= \frac{\frac{b^2}{\sqrt{4b^2 - a^2}}}{\frac{1}{2} \sqrt{4b^2 - a^2}} \overrightarrow{AM} \\ &= \frac{2b^2}{4b^2 - a^2} \overrightarrow{AM} \\ &= \frac{b^2}{4b^2 - a^2} \overrightarrow{AB} + \frac{b^2}{4b^2 - a^2} \overrightarrow{AC} \end{aligned}$$

となる。よって,

$$x = y = \frac{b^2}{4b^2 - a^2}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad x = y = \frac{b^2}{4b^2 - a^2}$$

Ⅲ

問 1

$$\begin{aligned}f(x) &< 0 \\ \Leftrightarrow x^2 &< a^2 - 2a + 1 \\ \Leftrightarrow x^2 &< (a-1)^2 \\ \therefore a-1 &< x < 1-a \quad (\because 0 < a < 1)\end{aligned}$$

と求まる。

(答) $a-1 < x < 1-a$

問 2

$f(x)$ の原始関数のひとつを、

$$F(x) = \frac{1}{3}x^3 + (-1 + 2a - a^2)x$$

と置くと、

$$F(1) = -a^2 + 2a - \frac{2}{3}$$

$$F(-1) = a^2 - 2a + \frac{2}{3}$$

$$F(1-a) = \frac{2}{3}a^3 - 2a^2 + 2a - \frac{2}{3}$$

$$F(a-1) = -\frac{2}{3}a^3 + 2a^2 - 2a + \frac{2}{3}$$

であるから、(1)より、

$$\begin{aligned}S &= \int_{-1}^1 |f(x)| dx \\ &= \int_{-1}^{a-1} f(x) dx - \int_{a-1}^{1-a} f(x) dx + \int_{1-a}^1 f(x) dx \\ &= F(1) - 2F(1-a) + 2F(a-1) - F(-1) \\ &= -\frac{8}{3}a^3 + 6a^2 - 4a + \frac{4}{3}\end{aligned}$$

と求まる。

(答) $-\frac{8}{3}a^3 + 6a^2 - 4a + \frac{4}{3}$

問 3

(2)より、

$$\begin{aligned}\frac{dS}{da} &= -8a^2 + 12a - 4 \\ &= -4(2a-1)(a-1)\end{aligned}$$

であるから、 $0 < a < 1$ における S の増減表は下記のとおりである。

a	(0)	...	$\frac{1}{2}$	...	(1)
S'		-	0	+	
S		$\searrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	

したがって、 S は

$$a = \frac{1}{2} \text{ のとき、最小値 } \frac{1}{2}$$

をとる。

(答) 最小値: $\frac{1}{2}$ ($a = \frac{1}{2}$ のとき)

IV

問 1

$X=6$ となるとき、 a, b, c のうち少なくともひとつが 6 であり、かつ a, b, c が 6~10 のどれかであればよい。 a, b, c の値が 6~10 となる場合は、

$$5^3 = 125 \text{ (通り)}$$

であるが、このうち 6 を含まない場合は、

$$4^3 = 64 \text{ (通り)}$$

であるので、 $X=6$ となる確率は、

$$\frac{125-64}{10^3} = \frac{61}{1000}$$

と求まる。

$$\text{(答)} \quad \frac{61}{1000}$$

問 2

$X=1, Y=3$ であるから、 a, b, c のうちひとつが 1、ひとつが 3、残りのひとつが 1~3 のどれかとなればよい。すなわち、 a, b, c の値の組合わせとして考えられるのは

$$(1, 1, 3), (1, 2, 3), (1, 3, 3)$$

となる。このような (a, b, c) の組の数は、

$${}_3C_1 + 3! + {}_3C_1 = 12 \text{ (通り)}$$

である。したがって、 $X=1, Z=3$ となる確率は、

$$\frac{12}{1000} = \frac{3}{250}$$

である。

$$\text{(答)} \quad \frac{3}{250}$$