

I

問 1

M が 5 で割り切れるとき、 $M-1$ は 5 で割って 4 余る。また、 $M-1$ が 5 で割り切れるとき、 M は 5 で割って 1 余る。よって、 M と $M-1$ の両方が 5 で割り切れることはない。ここで

$$25 = 5^2$$

なので、 $M(M-1)$ が 25 で割り切れるためには、 M と $M-1$ の一方が 5 で割り切れることが必要である。

[1] M が 5 で割り切れるとき

$M-1$ は 5 で割り切れないので、 $M(M-1)$ が 25 で割り切れることは M が 25 で割り切れることと同値である。 $0 \leq M \leq 99$ の範囲でこれを満たすのは

$$M = 0, 25, 50, 75$$

である。

[2] $M-1$ が 5 で割り切れるとき

M は 5 で割り切れないので、 $M(M-1)$ が 25 で割り切れることは $M-1$ が 25 で割り切れることと同値である。 $0 \leq M \leq 99$ の範囲でこれを満たすのは

$$M = 1, 26, 51, 76$$

である。

以上[1], [2]より、求める M は

$$M = 0, 1, 25, 26, 50, 51, 75, 76$$

である。

(答) $M = 0, 1, 25, 26, 50, 51, 75, 76$

問 2

N^2 と N の下 2 桁が一致する条件は、 $N^2 - N = N(N-1)$ が 100 で割り切れることである。ここで

$$100 = 2^2 \cdot 5^2$$

であるので、 $N(N-1)$ が 5^2 で割り切れることが必要である。問 1 の議論より、その条件は $N, N-1$ のどちらかが 25 で割り切れることなので、 $100 \leq N \leq 199$ より

$$N = 100, 101, 125, 126, 150, 151, 175, 176$$

が必要である。 $N(N-1)$ が 5^2 で割り切れ、かつ $2^2 = 4$ で割り切れれば 100 で割り切れ十分であるから、上の N のうち $N(N-1)$ が 4 で割り切れるものを探すと

$$N = 100, 101, 125, 176$$

となる。

(答) $N = 100, 101, 125, 176$

Ⅱ

問 1

求める面積は

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin \angle BAC &= \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

問 2

余弦定理より

$$\begin{aligned}BC^2 &= AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos \angle BAC \\ &= 3^2 + 2^2 - 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \\ &= 7\end{aligned}$$

なので、 $BC > 0$ より $BC = \sqrt{7}$ である。また、線分 AD は $\triangle ABC$ の内接円の中心を通ることから $\angle BAC$ を 2 等分する。よって

$$\angle BAD = \angle CAD = \frac{\pi}{6}$$

となる。ここで $\triangle ABC$ の面積は $\triangle ABD$ の面積と $\triangle ACD$ の面積の和に等しいので

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \cdot AB \cdot AD \sin \angle BAD + \frac{1}{2} \cdot AC \cdot AD \sin \angle CAD &= \frac{3\sqrt{3}}{2} \\ \Leftrightarrow \frac{3}{4} AD + \frac{1}{2} AD &= \frac{3\sqrt{3}}{2} \\ \Leftrightarrow AD &= \frac{6\sqrt{3}}{5}\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad BC = \sqrt{7}, \quad AD = \frac{6\sqrt{3}}{5}$$

問 3

$\triangle ABC$ の面積は $\triangle OAB$, $\triangle OBC$, $\triangle OCA$ の面積の和に等しいから

$$\begin{aligned}\frac{3\sqrt{3}}{2} &= \frac{1}{2} \cdot r \cdot (AB + BC + CA) \\ \Leftrightarrow \frac{3\sqrt{3}}{2} &= \frac{1}{2} \cdot r \cdot (3 + \sqrt{7} + 2) \\ \Leftrightarrow r &= \frac{3\sqrt{3}}{5 + \sqrt{7}}\end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad r = \frac{3\sqrt{3}}{5 + \sqrt{7}}$$

Ⅲ

問 1

$$2x^2 + 2ax \geq -a^2 + 1 \Leftrightarrow (a+x)^2 + x^2 \geq 1$$

であるので、すべての a で $(a+x)^2 + x^2 \geq 1$ が成立するように x を設定する。

ここで、左辺を $f(a)$ とすると、 $a = -x$ のとき最小値をとり、 $f(-x) = x^2$ となる。

$x^2 \geq 1$ を満たしてればよく、

$$x \leq -1, x \geq 1$$

とわかる。

$$(\text{答}) \quad x \leq -1, x \geq 1$$

問 2

求める範囲の補集合は、「すべての a で $3x^2 + 2ax < a^2 + 1$ が成立する x の範囲」となる。したがって、すべての a で $3x^2 + 2ax < a^2 + 1$ が成立する x の範囲を考える。ここで

$$\begin{aligned} 3x^2 + 2ax &< a^2 + 1 \\ \Leftrightarrow a^2 - 2ax - 3x^2 + 1 &> 0 \\ \Leftrightarrow (a-x)^2 - 4x^2 + 1 &> 0 \end{aligned}$$

となる。左辺を $g(a)$ とすると、 $a = x$ のとき最小値をとり、 $g(x) = -4x^2 + 1$ となる。

$-4x^2 + 1 > 0$ を満たしていればよく、

$$\begin{aligned} -4x^2 + 1 &> 0 \\ \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2} \end{aligned}$$

となる。求める範囲はこの範囲の補集合なので

$$x \leq -\frac{1}{2}, x \geq \frac{1}{2}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad x \leq -\frac{1}{2}, x \geq \frac{1}{2}$$

IV

問 1

手順 1 で青玉, 手順 2 で赤玉が出ればよいので, その確率は

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{4}$$

問 2

初めての赤玉が箱 B から出るためには, 手順 2, 4 または 6 で初めて赤玉が出ればよい。

[1] 手順 4 で初めて赤玉が出るとき

手順 1~3 で青玉, 手順 4 で赤玉が出ればよいので, その確率は

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

となる。

[2] 手順 6 で初めて赤玉が出るとき

手順 1~5 で青玉, 手順 6 で赤玉が出ればよいので, その確率は

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{12}$$

となる。

また, 問 1 から手順 2 で初めて赤玉が出る確率は $\frac{1}{4}$ なので, 初めての赤玉が箱 B から出る確率は

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{1}{2}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{2}$$