

I

〔解答〕

ア, b イ, e ウ, h エ, d オ, k
カ, f キ, j

〔解説〕

線分 OB は、 $y = \frac{12}{7}x$ となるので、この上には、 $(0, 0), (7, 12)$ の 2 つの格子点がある。また、線

分 OC は、 $y = \frac{5}{2}x$ となるので、この上には、 $(0, 0), (2, 5), (4, 10), (6, 15), (8, 20)$ の 5 つの格子

点がある。次に、線分 OQ について、 $y = \frac{b}{a}x$ となる。 a と b の最大公約数が d なので、

$a = da', b = db'$ (a', b' は互いに素) とすると、線分 OQ は、 $y = \frac{b'}{a'}x$ と表せる。よって、

$x = 0, a', 2a', \dots, da'$ のときに格子点となるので、線分 OQ 上には、 $(d+1)$ 個の格子点がある。つづいて、長方形 OPQR は、辺の長さが、 a と b の長方形であるので、その上にある格子点の総数は、 $(a+1)(b+1)$ 個となる。また、直角三角形 OPQ 上の格子点の総数について、長方形 OPQR 上の格子点のうち、線分 OQ 上の格子点以外のものは、直角三角形 OPQ と直角三角形 ORQ に 2 等分される。それに、線分 OQ 上の格子点の数を加えたものが、直角三角形 OPQ 上の格子点の総数となるので、

$$\frac{1}{2}\{(a+1)(b+1) - (d+1)\} + (d+1) = \frac{1}{2}\{(a+1)(b+1) + d+1\}$$

となる。つづいて、台形 DEFG について、D から線分 FG に下ろした垂線の足を H とすると、 $H(16, 3)$ となり、台形 DEFG は、長方形 DEFH と直角三角形 DHG とに分けられる。よって、ウ、エ、オの結果を用いると、台形 DEFG 上の格子点の総数は、

$$(4+1)(3+1) + \frac{1}{2}\{(4+1)(7+1) + 1+1\} - 5 = 36$$

となる。ここで、最後に 5 を引いたのは、線分 DH 上の格子点を重複して数えているためであり、また、 d の値は、直角三角形 DHG を D が原点となるように移動させたときに、 $G(4, 7)$ となることから、 $d = 1$ である。最後に、三角形 ODG 上にある格子点の総数を求める。直角三角形 OFG から、直角三角形 OED と台形 DEFG の格子点の数を引いて求めていくことを考える。まず、直角三角形 OFG 上の格子点の数について、オの結果から、

$$\frac{1}{2}\{(16+1)(10+1) + 2+1\} = 95$$

となる。次に、直角三角形 OED 上の格子点の数は、

$$\frac{1}{2}\{(12+1)(3+1) + 3+1\} = 28$$

となる。これと、カの結果から、重複に気をつけると、三角形 ODG 上の格子点の総数は、
 $95 - (28 + 36) + 9 = 40$

となる。

II

【解答】

ク, f ケ, h コ, l サ, c シ, h
ス, e セ, d ソ, k

【解説】

P_3 は, P_2 から $\vec{e_2}$ と同じ向きに $\frac{1}{\sqrt{2}}|\overrightarrow{P_1P_2}|$ だけ進んだ点である。 $|\overrightarrow{P_1P_2}| = \sqrt{2}$ より,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP_3} &= (0, 1) + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (-1, -1) \\ &= \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{2-\sqrt{2}}{2} \right)\end{aligned}$$

となる。 P_4 は, P_3 から $\vec{e_3}$ と同じ向きに $\frac{1}{\sqrt{2}}|\overrightarrow{P_2P_3}|$ だけ進んだ点である。 $|\overrightarrow{P_2P_3}| = 1$ より,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP_4} &= \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{2-\sqrt{2}}{2} \right) + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (1, -1) \\ &= \left(\frac{1-\sqrt{2}}{2}, \frac{1-\sqrt{2}}{2} \right)\end{aligned}$$

となる。 P_5 は, P_4 から $\vec{e_0}$ と同じ向きに $\frac{1}{\sqrt{2}}|\overrightarrow{P_3P_4}|$ だけ進んだ点である。 $|\overrightarrow{P_3P_4}| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ より,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP_5} &= \left(\frac{1-\sqrt{2}}{2}, \frac{1-\sqrt{2}}{2} \right) + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (1, 1) \\ &= \left(\frac{2-\sqrt{2}}{4}, \frac{2-\sqrt{2}}{4} \right)\end{aligned}$$

となる。ここで, $|\overrightarrow{P_1P_2}| = \sqrt{2}$, $|\overrightarrow{P_2P_3}| = 1$, $|\overrightarrow{P_3P_4}| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ より,

$$\ell_k = \frac{1}{\sqrt{2}} \ell_{k-1}$$

であるから, k が 4 の倍数のとき,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP_{k+1}} &= \overrightarrow{OP_k} + \frac{\ell_{k-1}}{\sqrt{2}} \vec{e_0} = \overrightarrow{OP_k} + \ell_k \vec{e_0} \\ \overrightarrow{OP_{k+2}} &= \overrightarrow{OP_{k+1}} + \frac{\ell_k}{\sqrt{2}} \vec{e_1} = \overrightarrow{OP_k} + \ell_k \vec{e_0} + \ell_{k+1} \vec{e_1}\end{aligned}$$

となるので,

$$\overrightarrow{P_kP_{k+2}} = \ell_k \vec{e_0} + \ell_{k+1} \vec{e_1}$$

であり, k を 4 で割った余りが 2 であるとき,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP_{k+1}} &= \overrightarrow{OP_k} + \frac{\ell_{k-1}}{\sqrt{2}} \vec{e_2} = \overrightarrow{OP_k} + \ell_k \vec{e_2} \\ \overrightarrow{OP_{k+2}} &= \overrightarrow{OP_{k+1}} + \frac{\ell_k}{\sqrt{2}} \vec{e_3} = \overrightarrow{OP_k} + \ell_k \vec{e_2} + \ell_{k+1} \vec{e_3}\end{aligned}$$

となるので,

$$\overrightarrow{P_kP_{k+2}} = \ell_k \vec{e_2} + \ell_{k+1} \vec{e_3}$$

である。よって, k が 4 の倍数のとき, $k+2$ は, 4 で割った余りが 2 なので,

$$\overrightarrow{P_{k+2}P_{k+4}} = \ell_{k+2} \vec{e_2} + \ell_{k+3} \vec{e_3}$$

と表せる。また, $\vec{e_2} = -\vec{e_0}$, $\vec{e_3} = -\vec{e_1}$ となるので,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{P_{k+2}P_{k+4}} &= \ell_{k+2} \vec{e_2} + \ell_{k+3} \vec{e_3} \\ &= \left(\frac{1}{2} \ell_k \right) (-\vec{e_0}) + \left(\frac{1}{2} \ell_{k+1} \right) (-\vec{e_1}) \\ &= -\frac{1}{2} (\ell_k \vec{e_0} + \ell_{k+1} \vec{e_1}) \\ &= -\frac{1}{2} \overrightarrow{P_kP_{k+2}}\end{aligned}$$

である。したがって, 点 P_{2n} の x 座標を a_n とすると, 上の式より,

$$a_{n+2} - a_{n+1} = -\frac{1}{2} (a_{n+1} - a_n)$$

となる。 a_n の階差数列を b_n とすると, b_n は公比 $-\frac{1}{2}$ の等比数列であり, 初項は,

$$b_1 = a_2 - a_1 = \left(\frac{1-\sqrt{2}}{2} \right) - 0 = \frac{1-\sqrt{2}}{2}$$

である。よって,

$$b_n = \left(\frac{1-\sqrt{2}}{2} \right) \cdot \left(-\frac{1}{2} \right)^{n-1}$$

となるから,

$$a_n = 0 + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{1-\sqrt{2}}{2} \right) \cdot \left(-\frac{1}{2} \right)^{i-1}$$

と表せる。よって,

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \left(\frac{1-\sqrt{2}}{2} \right) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n-1} \left(-\frac{1}{2} \right)^{i-1} \\ &= \left(\frac{1-\sqrt{2}}{2} \right) \cdot \frac{2}{3} \\ &= \frac{1-\sqrt{2}}{3}\end{aligned}$$

となる。

Ⅲ

(1)

$$\begin{aligned} PA^2 + PB^2 &= \{(t+1)^2 + m^2 t^2\} + \{(t-3)^2 + (mt-2)^2\} \\ &= 2(1+m^2)t^2 - 4(m+1)t + 14 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad 2(1+m^2)t^2 - 4(m+1)t + 14$$

(2)

$$2(1+m^2)t^2 - 4(m+1)t + 14 = 2(1+m^2)\left(t - \frac{1+m}{1+m^2}\right)^2 + 14 - \frac{2(1+m)^2}{1+m^2}$$

と変形することができるので、 $t = \frac{1+m}{1+m^2}$ のとき、 $PA^2 + PB^2$ は最小となる。 $X = t, Y = mt$ より、

$$X = \frac{1+m}{1+m^2}, Y = \frac{m+m^2}{1+m^2}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad X = \frac{1+m}{1+m^2}, Y = \frac{m+m^2}{1+m^2}$$

(3)

$Y = mX$ より、 $X \neq 0$ ($m \neq -1$) のとき、 $m = \frac{Y}{X}$ である。これを、 $X = \frac{1+m}{1+m^2}$ に代入して変形する

と、

$$\begin{aligned} X &= \frac{1 + \frac{Y}{X}}{1 + \left(\frac{Y}{X}\right)^2} \\ \Leftrightarrow X^2 - X + Y^2 - Y &= 0 \\ \therefore \left(X - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(Y - \frac{1}{2}\right)^2 &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

となる。よって、これは、中心 $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ で半径 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ の円となる。また、 $X = 0$ ($m = -1$) のとき、

$Y = 0$ となり、これは上記の円に含まれる。一方、点 $(0, 1)$ はこの円上の点であるが、これは軌跡に含まれない。

$$(\text{答}) \quad \text{円} : \left(X - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(Y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \quad (\text{ただし、点}(0, 1)\text{を除く})$$

IV

(1)

$f(x) = xe^{1-x}$ について、微分していくと、

$$f'(x) = e^{1-x} - xe^{1-x} = (1-x)e^{1-x}$$

$$f''(x) = -e^{1-x} - (1-x)e^{1-x} = (x-2)e^{1-x}$$

となる。よって、 $x=1$ のときに、極値 1 をとり、 $x=2$ のときが変曲点となる。

(答) 極値 1, 変曲点 $x=2$

(2)

接線 ℓ は、接線の公式より、

$$y - te^{1-t} = (1-t)e^{1-t}(x-t)$$

となり、これと x 軸との交点より、

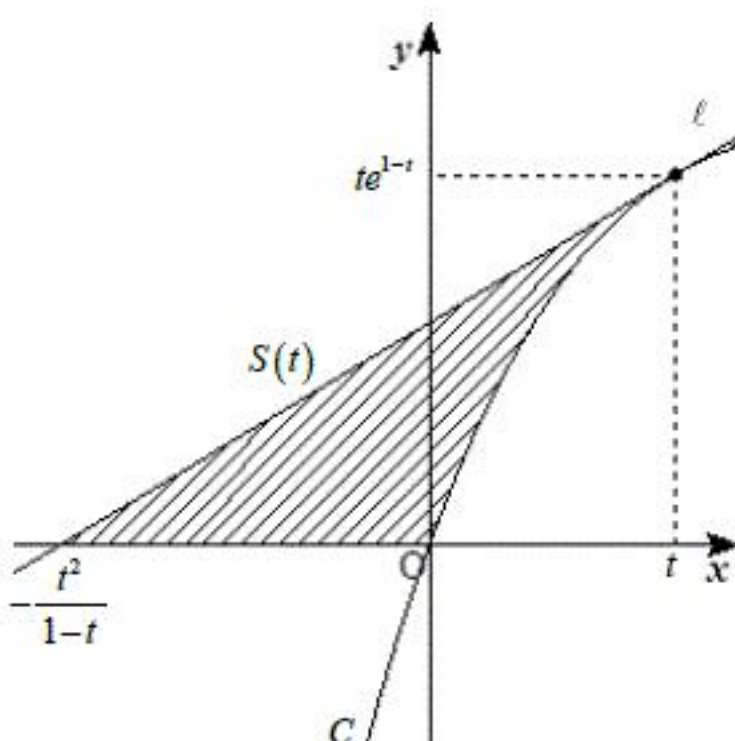
$$-te^{1-t} = (1-t)e^{1-t}(x-t)$$

$$\therefore x = -\frac{t^2}{1-t}$$

となる。

(答) $x = -\frac{t^2}{1-t}$

(3)



上の斜線部分が $S(t)$ となる。接線 ℓ と y 軸との交点は、 $y = te^{1-t}$ なので、 $S(t)$ は、

$$S(t) = \frac{1}{2} \cdot \frac{t^2}{1-t} \cdot te^{1-t} + \int_0^t \{(1-t)e^{1-t}x + t^2e^{1-t} - xe^{1-x}\} dx$$

と表せる。ここで、部分積分を用いて、

$$\begin{aligned} \int xe^{1-x} dx &= -xe^{1-x} + \int e^{1-x} dx \\ &= -(1+x)e^{1-x} \end{aligned}$$

となるので、

$$\begin{aligned} S(t) &= \frac{t^4}{2(1-t)}e^{1-t} + \left[(1+x)e^{1-x} + (1-t)e^{1-t} \frac{x^2}{2} + t^2e^{1-t}x \right]_0^t \\ &= \frac{2-t^2}{2(1-t)}e^{1-t} - e \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{2-t^2}{2(1-t)}e^{1-t} - e$

(4)

$$\begin{aligned} S(t) - \frac{1}{2(1-t)} &= \frac{2-t^2}{2(1-t)}e^{1-t} - e - \frac{1}{2(1-t)} \\ &= \frac{2-2t^2+t^2}{2(1-t)}e^{1-t} - e - \frac{1}{2(1-t)} \\ &= \frac{2(1+t)(1-t)}{2(1-t)}e^{1-t} + \frac{t^2}{2(1-t)}e^{1-t} - e - \frac{1}{2(1-t)} \\ &= (1+t)e^{1-t} + \frac{t^2-1+1}{2(1-t)}e^{1-t} - e - \frac{1}{2(1-t)} \\ &= (1+t)e^{1-t} + \frac{t^2-1}{2(1-t)}e^{1-t} - e + \frac{e^{1-t}}{2(1-t)} - \frac{1}{2(1-t)} \\ &= (1+t)e^{1-t} - \frac{(1+t)}{2}e^{1-t} - e + \frac{e^{1-t}-1}{2(1-t)} \\ &= \frac{(1+t)}{2}e^{1-t} - e + \frac{1}{2} \frac{e^{1-t}-1}{1-t} \end{aligned}$$

となる。ここで、 $X=1-t$ とすると、

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 1-0} \frac{e^{1-t}-1}{1-t} &= \lim_{X \rightarrow 0} \frac{e^X - e^0}{X - 0} \\ &= e^0 \\ &= 1 \end{aligned}$$

となるので、

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 1-0} \left\{ S(t) - \frac{1}{2(1-t)} \right\} &= \lim_{t \rightarrow 1-0} \left\{ \frac{(1+t)}{2}e^{1-t} - e + \frac{1}{2} \frac{e^{1-t}-1}{1-t} \right\} \\ &= 1 - e + \frac{1}{2} \\ &= \frac{3}{2} - e \end{aligned}$$

である。

(答) $\frac{3}{2} - e$