

## 2013 年度 入学 試験 問題

# 数 学

(試験時間 15:20~17:00 100 分)

1. 解答用紙は、記述解答用紙とマーク解答用紙の2種類がありますので注意してください。
2. 解答は、必ず解答欄に記入してください。なお、解答欄以外に書くと無効となりますので注意してください。
3. 解答は、HBの鉛筆またはシャープペンシルを使用し、訂正する場合は、プラスチック製の消しゴムを使用してください。特に、マーク解答用紙には鉛筆のあとや消しくずを残さないでください。また、折りまげたり、汚したりしないでください。記述解答用紙の下敷きにマーク解答用紙を使用することは絶対にさけてください。
4. 解答用紙には、受験番号と氏名を必ず記入してください。
5. マーク解答用紙の受験番号および受験番号のマーク記入は、コンピュータ処理上非常に重要なので、誤記のないよう特に注意してください。
6. 設問文にある点数は、満点が100点となるような配点表示になっていますが、数学科は満点が200点であり、各問の配点は2倍になります。

- I 次の問題文の空欄にもっとも適する答えを解答群から選び、その記号をマーク解答用紙にマークせよ。ただし、同じ記号を2度以上用いてもよい。(20点)

座標平面上で、 $x$ 座標と $y$ 座標がともに整数である点を格子点と呼ぶ。いくつかの図形について、それらに含まれる格子点の総数を求めてみよう。

$O(0,0)$ ,  $A(6,6)$ ,  $B(7,12)$ ,  $C(8,20)$  とする。このとき、線分  $OA$  上にある格子点の総数は7である。また、線分  $OB$ , 線分  $OC$  上にある格子点の総数は、それぞれ ア, イ である。

次に、 $a, b$  を正の整数とし、 $P(a,0)$ ,  $Q(a,b)$ ,  $R(0,b)$  とする。また、 $a$  と  $b$  の最大公約数を  $d$  とする。このとき、線分  $OQ$  上にある格子点の総数は ウ である。さらに、長方形  $OPQR$  上にある格子点の総数は エ であり、直角三角形  $OPQ$  上にある格子点の総数は オ である。ただし、長方形  $OPQR$  や直角三角形  $OPQ$  は、周および内部を含むとする。

また、 $D(12,3)$ ,  $E(12,0)$ ,  $F(16,0)$ ,  $G(16,10)$  とする。このとき、台形  $DEFG$  上にある格子点の総数は カ であり、三角形  $ODG$  上にある格子点の総数は キ である。ただし、台形  $DEFG$  や三角形  $ODG$  は、周および内部を含むとする。

問題 I の ア, イ の解答群

- |     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|
| Ⓐ 1 | Ⓑ 2 | Ⓒ 3 | Ⓓ 4 | Ⓔ 5 |
| Ⓕ 6 | Ⓖ 7 | Ⓗ 8 | Ⓙ 9 |     |

問題 I のウの解答群

- |           |           |           |             |             |
|-----------|-----------|-----------|-------------|-------------|
| Ⓐ $a$     | Ⓑ $a+1$   | Ⓒ $a-1$   | Ⓓ $b$       | Ⓔ $b+1$     |
| Ⓕ $b-1$   | Ⓖ $d$     | Ⓗ $d+1$   | Ⓙ $d-1$     | Ⓚ $a+b$     |
| Ⓛ $a+b+1$ | Ⓜ $a+b-1$ | Ⓨ $a+b-d$ | Ⓩ $a+b-d+1$ | ⓐ $a+b-d-1$ |

問題 I のエの解答群

- |                |                  |                  |
|----------------|------------------|------------------|
| Ⓐ $ab$         | Ⓑ $ab+1$         | Ⓒ $ab-1$         |
| Ⓓ $(a+1)(b+1)$ | Ⓔ $(a+1)(b+1)+1$ | Ⓕ $(a+1)(b+1)-1$ |
| Ⓖ $(a-1)(b-1)$ | Ⓗ $(a-1)(b-1)+1$ | Ⓙ $(a-1)(b-1)-1$ |

問題 I のオの解答群

- |                                   |                                   |
|-----------------------------------|-----------------------------------|
| ㉑ $\frac{1}{2}(a+1)(b+1)$         | ㉒ $\frac{1}{2}\{(a+1)(b+1)+1\}$   |
| ㉓ $\frac{1}{2}\{(a+1)(b+1)-1\}$   | ㉔ $\frac{1}{2}(a+2)(b+1)$         |
| ㉕ $\frac{1}{2}(a+1)(b+2)$         | ㉖ $\frac{1}{2}(a+2)(b+2)$         |
| ㉗ $\frac{1}{2}(ab+d)$             | ㉘ $\frac{1}{2}(ab+d+1)$           |
| ㉙ $\frac{1}{2}(ab+d-1)$           | ㉚ $\frac{1}{2}\{(a+1)(b+1)+d\}$   |
| ㉛ $\frac{1}{2}\{(a+1)(b+1)+d+1\}$ | ㉜ $\frac{1}{2}\{(a+1)(b+1)+d-1\}$ |

問題 I のカ、キの解答群

- |      |      |      |      |      |
|------|------|------|------|------|
| ㉑ 31 | ㉒ 32 | ㉓ 33 | ㉔ 34 | ㉕ 35 |
| ㉖ 36 | ㉗ 37 | ㉘ 38 | ㉙ 39 | ㉚ 40 |
| ㉛ 41 | ㉜ 42 | ㉝ 43 | ㉞ 44 | ㉟ 45 |

(設問は次ページに続く。)

II 次の問題文の空欄にもっとも適する答えを解答群から選び、その記号をマーク解答用紙にマークせよ。ただし、同じ記号を2度以上用いてもよい。(20 点)

ベクトル  $\vec{e}_0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  を

$$\vec{e}_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1), \quad \vec{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1), \quad \vec{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, -1), \quad \vec{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1)$$

とおく。座標平面上の点  $P_1(1, 0)$  と  $P_2(0, 1)$  から始めて、点  $P_3, P_4, \dots$  を次の手順によって定める。

$k$  を 4 で割った余りが  $j$  であるとき、 $P_k$  から  $\vec{e}_j$  と同じ向きに長さ  $\frac{1}{\sqrt{2}} |\overrightarrow{P_{k-1}P_k}|$  だけ進んだ点を  $P_{k+1}$  と定める。

例えば  $P_3$  の座標は ク であり、 $P_4$  と  $P_5$  の座標はそれぞれ ケ、コ である。 $k = 1, 2, \dots$  に対し、 $\ell_k = |\overrightarrow{P_kP_{k+1}}|$  とする。 $k$  が 4 の倍数であるとき

$$\overrightarrow{P_kP_{k+2}} = \text{ サ }$$

であり、 $k$  を 4 で割った余りが 2 であるとき

$$\overrightarrow{P_kP_{k+2}} = \text{ シ }$$

である。したがって  $k$  が偶数ならば、 $\overrightarrow{P_kP_{k+2}}$  と  $\overrightarrow{P_{k+2}P_{k+4}}$  は ス という関係のみたし、 $P_k$  はすべて同一直線上にあることがわかる。以下では  $n = 1, 2, \dots$  に対して  $P_{2n}$  の  $x$  座標を  $a_n$  と表す。このとき

$$a_{n+2} - a_{n+1} = \text{ セ } \times (a_{n+1} - a_n)$$

という関係が成立するから、 $a_n$  の階差数列は公比 セ の等比数列である。したがって

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \text{ ソ }$$

となる。

問題 II のク、ケ、コの解答群

Ⓐ  $(-1, 0)$

Ⓔ  $(0, -1)$

Ⓒ  $(1, 0)$

Ⓓ  $(0, 1 - \sqrt{2})$

Ⓕ  $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{2 + \sqrt{2}}{2}\right)$

Ⓔ  $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{2 - \sqrt{2}}{2}\right)$

Ⓔ  $\left(\frac{-1 - \sqrt{2}}{2}, \frac{-1 - \sqrt{2}}{2}\right)$

Ⓕ  $\left(\frac{1 - \sqrt{2}}{2}, \frac{1 - \sqrt{2}}{2}\right)$

Ⓔ  $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Ⓔ  $\left(\frac{1 + \sqrt{2}}{4}, \frac{1 + \sqrt{2}}{4}\right)$

Ⓕ  $\left(\frac{2 + \sqrt{2}}{4}, \frac{2 + \sqrt{2}}{4}\right)$

Ⓔ  $\left(\frac{2 - \sqrt{2}}{4}, \frac{2 - \sqrt{2}}{4}\right)$

問題 II のサ、シの解答群

- (a)  $\ell_{k-2} \vec{e}_0 + \ell_{k-1} \vec{e}_1$       (b)  $\ell_{k-1} \vec{e}_0 + \ell_k \vec{e}_1$       (c)  $\ell_k \vec{e}_0 + \ell_{k+1} \vec{e}_1$   
 (d)  $\ell_{k+1} \vec{e}_0 + \ell_{k+2} \vec{e}_1$       (e)  $\ell_{k-1} \vec{e}_3 + \ell_k \vec{e}_0$       (f)  $\ell_{k-2} \vec{e}_2 + \ell_{k-1} \vec{e}_3$   
 (g)  $\ell_{k-1} \vec{e}_2 + \ell_k \vec{e}_3$       (h)  $\ell_k \vec{e}_2 + \ell_{k+1} \vec{e}_3$       (i)  $\ell_{k+1} \vec{e}_2 + \ell_{k+2} \vec{e}_3$

問題 II のスの解答群

- (a)  $\overrightarrow{P_{k+2}P_{k+4}} = -\overrightarrow{P_kP_{k+2}}$       (b)  $\overrightarrow{P_{k+2}P_{k+4}} = \overrightarrow{P_kP_{k+2}}$   
 (c)  $\overrightarrow{P_{k+2}P_{k+4}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \overrightarrow{P_kP_{k+2}}$       (d)  $\overrightarrow{P_{k+2}P_{k+4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \overrightarrow{P_kP_{k+2}}$   
 (e)  $\overrightarrow{P_{k+2}P_{k+4}} = -\frac{1}{2} \overrightarrow{P_kP_{k+2}}$       (f)  $\overrightarrow{P_{k+2}P_{k+4}} = \frac{1}{2} \overrightarrow{P_kP_{k+2}}$   
 (g)  $\overrightarrow{P_{k+2}P_{k+4}} = -\frac{\sqrt{2}}{4} \overrightarrow{P_kP_{k+2}}$       (h)  $\overrightarrow{P_{k+2}P_{k+4}} = \frac{\sqrt{2}}{4} \overrightarrow{P_kP_{k+2}}$

問題 II のセ、ソの解答群

- (a)  $-1$       (b)  $1$       (c)  $1 - \sqrt{2}$       (d)  $-\frac{1}{2}$   
 (e)  $\frac{1}{2}$       (f)  $-\frac{\sqrt{2}}{2}$       (g)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$       (h)  $\frac{4 - 3\sqrt{2}}{2}$   
 (i)  $\frac{-1 - \sqrt{2}}{3}$       (j)  $\frac{-2 + \sqrt{2}}{3}$       (k)  $\frac{1 - \sqrt{2}}{3}$       (l)  $\frac{-2 + 2\sqrt{2}}{3}$   
 (m)  $-\frac{\sqrt{2}}{4}$       (n)  $\frac{\sqrt{2}}{4}$       (o)  $\frac{1 - \sqrt{2}}{4}$

(設問は次ページに続く。)

III 座標平面上に2点  $A(-1, 0)$ ,  $B(3, 2)$  をとる。 $m$  を実数とし、直線  $y = mx$  を  $\ell$  とする。以下の問いに答えよ。(30点)

- (1)  $\ell$  上の点  $P$  の座標を  $(t, mt)$  とするとき、 $PA^2 + PB^2$  を  $t, m$  を用いて表せ。
- (2) 点  $P$  が  $\ell$  上を動くとき、 $PA^2 + PB^2$  を最小にする  $P$  の座標を  $(X, Y)$  とおく。 $X, Y$  を  $m$  で表せ。
- (3)  $m$  が実数全体を動くとき、 $(X, Y)$  はある曲線  $C$  上を動く。 $C$  の方程式を求めよ。

(設問は次ページに続く。)

IV  $f(x) = xe^{1-x}$  とおき, 関数  $y = f(x)$  のグラフを  $C$  とする。以下の問いに答えよ。  
(30 点)

(1)  $f(x)$  の極値と, 曲線  $C$  の変曲点の  $x$  座標を求めよ。

(2)  $0 < t < 1$  とし, 点  $(t, te^{1-t})$  における曲線  $C$  の接線を  $\ell$  とする。 $\ell$  と  $x$  軸との交点の  $x$  座標を  $t$  で表せ。

(3) (2) のもとで, 曲線  $C$ , 直線  $\ell$  および  $x$  軸で囲まれる部分の面積  $S(t)$  を求めよ。

(4)  $\lim_{t \rightarrow 1-0} \left\{ S(t) - \frac{1}{2(1-t)} \right\}$  を求めよ。

(以下計算用紙)