

I

〔解答〕

(1)	$x < \frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2} < x$
(2)	$-\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}}{6}$
(3)	$\frac{\pi}{3}$

(4)	166650
(5)	$\text{円}(x-10)^2+(y-16)^2=180$
(6)	$f(x)=x^2-\frac{2}{9}x$

〔解説〕

(1)

$$\begin{aligned} x^2-3x+1 &> 0 \\ \Leftrightarrow \left(x-\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) &> 0 \\ \therefore x &< \frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2} < x \end{aligned}$$

となる。

(2)

$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ より, $\cos \alpha > 0$ であるから,

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \sqrt{1-\sin^2 \alpha} \\ &= \sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

となる。また, $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$ より $\cos \beta < 0$ であるから,

$$\begin{aligned} \cos \beta &= -\sqrt{1-\sin^2 \beta} \\ &= -\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2} \\ &= -\frac{2\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

となる。したがって,

$$\begin{aligned} \sin(\alpha-\beta) &= \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{3} \\ &= -\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}}{6} \end{aligned}$$

である。

(3)

$$\begin{aligned} |\vec{a}| &= \sqrt{2^2+4^2+2^2} = 2\sqrt{6} \\ |\vec{b}| &= \sqrt{2^2+1^2+(-1)^2} = \sqrt{6} \\ \vec{a} \cdot \vec{b} &= 2 \cdot 2 + 4 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) = 6 \end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta \\ \Leftrightarrow 6 &= 2\sqrt{6} \cdot \sqrt{6} \cos \theta \\ \Leftrightarrow \cos \theta &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{3} \quad (\because 0 \leq \theta \leq \pi)$$

となる。

(4)

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{50} (2k-1)^2 &= \sum_{k=1}^{50} (4k^2-4k+1) \\ &= 4 \cdot \frac{1}{6} \cdot 50 \cdot 51 \cdot 101 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 50 \cdot 51 + 50 \\ &= 2 \cdot 50 \cdot 17 \cdot 101 - 2 \cdot 50 \cdot 51 + 50 \\ &= 2 \cdot 50 \cdot 17 \cdot (101-3) + 50 \\ &= 50 \cdot (2 \cdot 17 \cdot 98 + 1) \\ &= 50 \cdot 3333 \\ &= 166650 \end{aligned}$$

である。

(5)

$P(x, y)$ とおくと,

$$\begin{aligned} PA:PB &= 3:2 \\ \Leftrightarrow 3PB &= 2PA \\ \Leftrightarrow 9PB^2 &= 4PA^2 \\ \Leftrightarrow 9\{(x-6)^2+(y-8)^2\} &= 4\{(x-1)^2+(y+2)^2\} \\ \Leftrightarrow 9(x^2-12x+y^2-16y+100) &= 4(x^2-2x+y^2+4y+5) \\ \Leftrightarrow 5x^2-100x+5y^2-160y+880 &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2-20x+y^2-32y+176 &= 0 \\ \Leftrightarrow \{(x-10)^2-100\} + \{(y-16)^2-256\} + 176 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-10)^2+(y-16)^2 &= 180 \end{aligned}$$

より, 求める軌跡は円 $(x-10)^2+(y-16)^2=180$ である。

(6)

k を実数定数として $\int_0^1 f(t) dt = k$ とおくと, 与えられた条件より

$$f(x)+x \cdot k = x^2 \Leftrightarrow f(x) = x^2 - kx$$

と表せる。よって,

$$\begin{aligned} k &= \int_0^1 f(t) dt \\ &= \int_0^1 (t^2 - kt) dt \\ &= \left[\frac{t^3}{3} - \frac{k}{2} t^2 \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{3} - \frac{k}{2} \\ \therefore k &= \frac{2}{9} \end{aligned}$$

を得る。したがって, $f(x) = x^2 - \frac{2}{9}x$ となる。

II

(1)

1 から 12 までの番号をつけた 12 枚のカードから同時に 3 枚のカードを取り出すとき、取り出し方の総数は ${}_{12}C_3 = 220$ 通りあり、これらは同様に確からしく起こる。 m が 5 以上かつ M が 8 以下となるようなカードの取り出し方は、5, 6, 7, 8 の 4 枚のカードから 3 枚のカードを取り出すときの、取り出し方の総数と一致するから、

$${}_4C_3 = 4 \text{ (通り)}$$

である。したがって、求める確率は、

$$\frac{4}{220} = \frac{1}{55}$$

である。

$$\text{(答)} \quad \frac{1}{55}$$

(2)

余事象を考え、まず「 m が 3 以上または M が 9 以下である」確率を求める。まず、 m が 3 以上になるようなカードの取り出し方は、3 ~ 12 の 10 枚のカードから 3 枚のカードを取り出すときの、取り出し方の総数と一致するから、

$${}_{10}C_3 = 120 \text{ (通り)}$$

である。同様にして、 M が 9 以下になるようなカードの取り出し方は、

$${}_9C_3 = 84 \text{ (通り)}$$

であり、さらに、 m が 3 以上かつ M が 9 以下となるようなカードの取り出し方は、(1) と同様に考えることで、

$${}_7C_3 = 35 \text{ (通り)}$$

となる。したがって、 m が 3 以上または M が 9 以下となるようなカードの取り出し方は、

$$120 + 84 - 35 = 169 \text{ (通り)}$$

であるから、求める確率は、

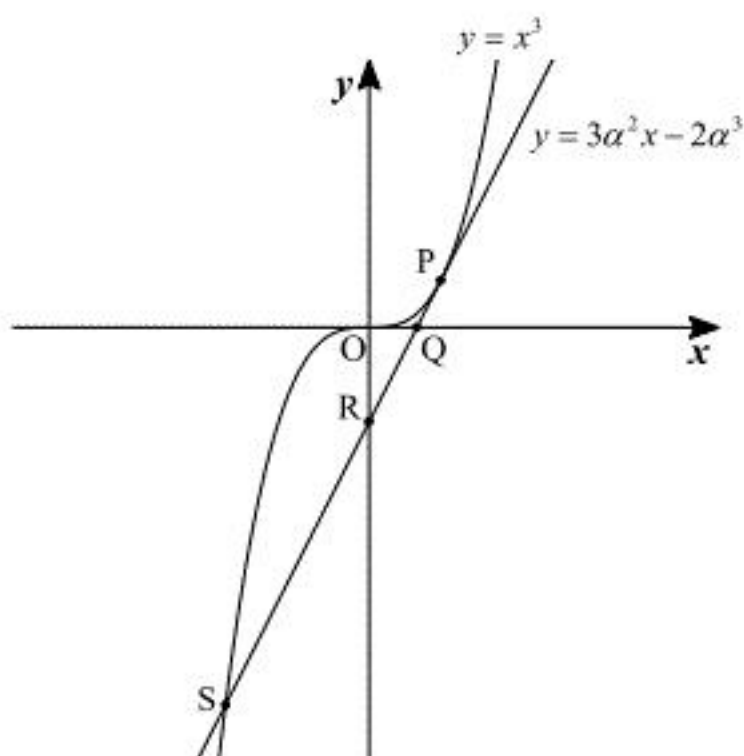
$$1 - \frac{169}{220} = \frac{51}{220}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad \frac{51}{220}$$

Ⅲ

(1)



曲線 C の方程式を微分すると、

$$y' = 3x^2$$

であるから、点 $P(\alpha, \alpha^3)$ における曲線 C の接線の傾きは $3\alpha^2$ である。よって、点 P での接線の方程式は、

$$y = 3\alpha^2(x - \alpha) + \alpha^3$$

$$\therefore y = 3\alpha^2x - 2\alpha^3$$

となる。

$$(答) \ y = 3\alpha^2x - 2\alpha^3$$

(2)

点 Q は x 軸との交点だから、 $y=0$ である。これと接線の方程式より、点 $Q\left(\frac{2}{3}\alpha, 0\right)$ となる。

点 R は y 軸との交点だから、 $x=0$ である。これと接線の方程式より、点 $R(0, -2\alpha^3)$ となる。

点 S について、接線の方程式と曲線 C の方程式を連立して得られる式

$$\begin{cases} y = x^3 \\ y = 3\alpha^2x - 2\alpha^3 \end{cases}$$

が成り立つことから、

$$x^3 - 3\alpha^2x + 2\alpha^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - \alpha)^2(x + 2\alpha) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \alpha, x = -2\alpha$$

となるが、 $x = \alpha$ は点 P を指すため、点 S の座標は $(-2\alpha, -8\alpha^3)$ である。

$$(答) \ Q\left(\frac{2}{3}\alpha, 0\right), R(0, -2\alpha^3), S(-2\alpha, -8\alpha^3)$$

(3)

P, Q, R, S は全て一直線上にあるから、 PQ, QR, RS の比はその x 座標の差の比で決まる。よって、 $\alpha > 0$ であることから

$$PQ:QR:RS = \left|\alpha - \frac{2}{3}\alpha\right| : \left|\frac{2}{3}\alpha - 0\right| : |0 - (-2\alpha)|$$

$$= \frac{1}{3}\alpha : \frac{2}{3}\alpha : 2\alpha$$

$$= 1:2:6$$

となり、これは α によらず一定である。

(証明終)