

【解答】

(1)	$(2x-y-1)(x+2y-1)$	(4)	最小値： $\frac{11}{4}$ $x=\sqrt{2}$
(2)	60°	(5)	$\frac{7}{30}$
(3)	$2x-1$	(6)	$\frac{9}{4}-\frac{2n+3}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

【解説】

(1)

$$\begin{aligned}
 2x^2+3xy-2y^2-3x-y+1 &= 2x^2+(3y-3)x-2y^2-y+1 \\
 &= 2x^2+(3y-3)x-(2y-1)(y+1) \\
 &= \{2x-(y+1)\}\{x+(2y-1)\} \\
 &= (2x-y-1)(x+2y-1)
 \end{aligned}$$

となる。

(2)

a, b, c, k を正の実数として、 $BC = ak, CA = bk, AB = ck$ とおくと、正弦定理より、

$$\begin{aligned}
 \frac{ak}{\sin A} &= \frac{bk}{\sin B} = \frac{ck}{\sin C} \\
 \therefore ak : bk : ck &= \sin A : \sin B : \sin C \qquad \qquad \qquad \cdot \cdot \cdot \textcircled{1}
 \end{aligned}$$

となる。ここで、問題文より、

$$\begin{aligned}
 \frac{8}{\sin A} &= \frac{7}{\sin B} = \frac{5}{\sin C} \\
 \therefore 8 : 7 : 5 &= \sin A : \sin B : \sin C \qquad \qquad \qquad \cdot \cdot \cdot \textcircled{2}
 \end{aligned}$$

であるから、 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ より

$$\begin{aligned}
 ak : bk : ck &= 8 : 7 : 5 \\
 \therefore a : b : c &= 8 : 7 : 5
 \end{aligned}$$

となる。 $a = 8, b = 7, c = 5$ とおくと、

$$\begin{aligned}
 \cos B &= \frac{(ak)^2 + (ck)^2 - (bk)^2}{2 \cdot ak \cdot ck} \\
 &= \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \\
 &= \frac{8^2 + 5^2 - 7^2}{2 \cdot 8 \cdot 5} \\
 &= \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

となるから、 $0^\circ < \angle B < 180^\circ$ より $\angle B = 60^\circ$ となる。

(3)

$P(x)$ を $(x-2)(x+3)$ で割ったときの余りは高々1次であるから、 $P(x)$ は整式 $Q(x)$ および実数 a, b を用いることによって、

$$\begin{aligned}
 P(x) &= (x-2)(x+3)Q(x) + ax + b
 \end{aligned}$$

と表すことができる。問題文から、剰余の定理より

$$\begin{cases} P(2) = 3 \\ P(-3) = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b = 3 \\ -3a + b = -7 \end{cases}$$

となるから、

$$(a, b) = (2, -1)$$

である。したがって、 $P(x)$ を $(x-2)(x+3)$ で割ったときの余りは $2x-1$ である。

(4)

$$\begin{aligned}
 y &= (\log_2 x)^2 - \log_2 x + 3 \\
 &= \left(\log_2 x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 3 \\
 &= \left(\log_2 x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{11}{4}
 \end{aligned}$$

と変形できるから、 $y = (\log_2 x)^2 - \log_2 x + 3$ は $\log_2 x = \frac{1}{2}$ 、すなわち $x = \sqrt{2}$ のときに、最小値

$$\frac{11}{4}$$

をとる。

(5)

1人目が当たりを引く確率は、10本のくじのうち3本が当たりであることから、

$$\frac{3}{10}$$

である。この条件のもとで、2人目がはずれを引く確率は、残りの9本のくじのうち2本が当たりであることから、

$$\frac{9-2}{9} = \frac{7}{9}$$

である。したがって、求める確率は、

$$\frac{3}{10} \cdot \frac{7}{9} = \frac{7}{30}$$

である。

(6)

$$\begin{aligned}
 S_n &= 1 \cdot 1 + 2 \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \cdots + n \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \\
 \frac{1}{3} S_n &= 1 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \cdots + (n-1) \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + n \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n
 \end{aligned}$$

であるから、各辺引き算を行うと、

$$\begin{aligned}
 \frac{2}{3} S_n &= 1 + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} - n \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n \\
 &= \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 - \frac{1}{3}} - n \left(\frac{1}{3}\right)^n \\
 &= \frac{3}{2} - \frac{3}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^n - n \left(\frac{1}{3}\right)^n \\
 &= \frac{3}{2} - \frac{2n+3}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^n
 \end{aligned}$$

$$\therefore S_n = \frac{9}{4} - \frac{2n+3}{4} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

となる。

II

(1)

$y = x^2$ において、

$$y' = 2x$$

であるから接点 $P(p, p^2)$ における接線 ℓ の方程式は

$$y = 2p(x - p) + p^2$$

$$\therefore y = 2px - p^2$$

である。

$$(\text{答}) \quad y = 2px - p^2$$

(2)

$p > 0$ より、線分 AP が y 軸に平行になることはない。したがって、線分 AP の傾きは

$$\frac{p^2 - \frac{5}{4}}{p - 0} = \frac{p^2 - \frac{5}{4}}{p}$$

であるから、線分 AP と接線 ℓ が直交するとき、

$$\frac{p^2 - \frac{5}{4}}{p} \cdot 2p = -1$$

$$\Leftrightarrow p^2 = \frac{3}{4}$$

である。 $p > 0$ より、

$$p = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

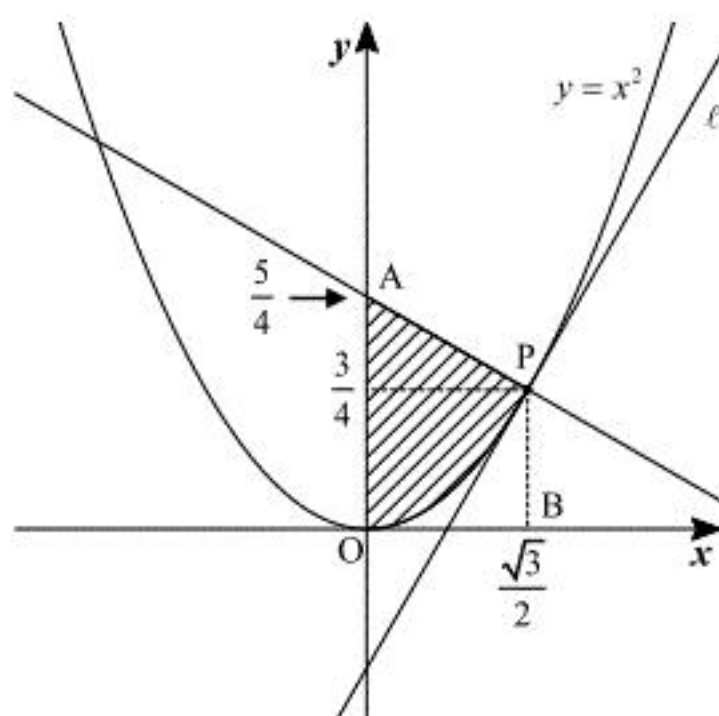
であるから、接点 P の座標は

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{4} \right)$$

である。

$$(\text{答}) \quad \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{4} \right)$$

(3)



上図の斜線部の面積を求めればよい。点 B を $B\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$ とおいて、台形 $OAPB$ の面積から放物

線 $y = x^2$ 、線分 OB 、線分 BP で囲まれた部分の面積を引くことを考えると、求める面積は

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{4} + \frac{5}{4} \right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} x^2 dx &= \frac{\sqrt{3}}{2} - \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{8} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

Ⅲ

(1)

$x=i$ ($i=0, 1, \dots, n$) とすると,

$$y \leq n-i$$

となるので, $x=i$ に対して y は $n-i+1$ 通りの値をとれる。よって, 求める個数を N とすると,

$$\begin{aligned} N &= \sum_{i=0}^n (n-i+1) \\ &= (n+1) + n + \dots + 2 + 1 \\ &= 1 + 2 + \dots + n + (n+1) \\ &= \frac{1}{2}(n+1)(n+2) \end{aligned}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad \frac{1}{2}(n+1)(n+2) \text{ 個}$$

(2)

$$\frac{x}{2} + y \leq n$$

$$\Leftrightarrow x + 2y \leq 2n$$

であり, $y=i$ ($i=0, 1, \dots, n$) とすると,

$$x \leq 2n - 2i$$

となるので, $y=i$ に対して x は $2n-2i+1$ 通りの値をとれる。よって, 求める個数を N' とすると, (1)の結果も利用して

$$\begin{aligned} N' &= \sum_{i=0}^n (2n - 2i + 1) \\ &= 2 \sum_{i=0}^n (n - i + 1) - \sum_{i=0}^n 1 \\ &= 2N - (n+1) \\ &= 2 \cdot \frac{1}{2}(n+1)(n+2) - (n+1) \\ &= (n+1)^2 \end{aligned}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad (n+1)^2 \text{ 個}$$

(3)

$x=i$ ($i=0, 1, \dots, n$) とすると,

$$\sqrt{y} \leq n-i$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq y \leq (n-i)^2$$

となるので, $x=i$ に対して y は $(n-i)^2 + 1$ 通りの値をとることができる。よって, 求める個数を N'' とすると,

$$\begin{aligned} N'' &= \sum_{i=0}^n \left\{ (n-i)^2 + 1 \right\} \\ &= \sum_{i=0}^n (n-i)^2 + \sum_{i=0}^n 1 \\ &= \left\{ n^2 + (n-1)^2 + \dots + 1^2 + 0^2 \right\} + (n+1) \\ &= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + (n+1) \\ &= \frac{1}{6}(n+1)(2n^2 + n + 6) \end{aligned}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad \frac{1}{6}(n+1)(2n^2 + n + 6) \text{ 個}$$