

# I

(i)

$4^n$  ( $n$ は自然数)について、 $n$ が偶数のときは末尾の数字が6に、 $n$ が奇数のときは末尾の数字が4となる。よって、整数 $4^{100}$ の末尾の数字は6である。

(答) 6

(ii)

(i)の結果より、 $p$ が奇数のときに $n$ の末尾の数字は4となる。また、 $n$ の桁数が20以下であることから、

$$n < 10^{20}$$

$$\Leftrightarrow 2014^p < 10^{20}$$

となる。両辺の常用対数をとると、

$$p \log_{10} 2014 < 20$$

$$\Leftrightarrow p \log_{10} (2 \cdot 19 \cdot 53) < 20$$

$$\Leftrightarrow p (\log_{10} 2 + \log_{10} 19 + \log_{10} 53) < 20$$

$$\Leftrightarrow p (0.30 + 1.28 + 1.72) < 20$$

$$\Leftrightarrow 3.3p < 20$$

$$\Leftrightarrow p < 6.060 \dots$$

となり、 $p$ は奇数であることから、 $p=1, 3, 5$ である。

(答)  $p=1, 3, 5$

## II

(i)

$$f'(x) = 2ax - b$$

である。与えられた条件より、 $y = f(x)$  のグラフが接点  $(c, c)$  で直線  $y = x$  と接することから、

$$\begin{cases} f(c) = c & \dots \textcircled{1} \\ f'(c) = 1 & \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

が成立する。①式より、

$$f'(c) = 1$$

$$\Leftrightarrow 2ac - b = 1$$

$$\Leftrightarrow ac = \frac{b+1}{2} \quad \dots \textcircled{3}$$

となり、②式より、

$$f(c) = c$$

$$\Leftrightarrow ac^2 - bc + 1 = c$$

$$\Leftrightarrow \frac{b+1}{2} \cdot c - bc + 1 = c \quad (\because \textcircled{3})$$

$$\Leftrightarrow c(b+1) = 2$$

$$\Leftrightarrow c = \frac{2}{b+1} \quad (\because b > 0 \text{ より } b+1 \neq 0) \quad \dots \textcircled{4}$$

となる。以上より、④式を③式に代入して、

$$a \cdot \frac{2}{b+1} = \frac{b+1}{2}$$

$$\therefore a = \frac{(b+1)^2}{4}$$

を得る。

$$\text{(答)} \quad a = \frac{(b+1)^2}{4}$$

(ii)

(i)の過程より、

$$f(c) = c$$

$$= \frac{2}{b+1}$$

である。

$$\text{(答)} \quad f(c) = \frac{2}{b+1}$$

(iii)

(ii)より、

$$b + f(c) = b + \frac{2}{b+1}$$

$$= b+1 + \frac{2}{b+1} - 1$$

となる。ここで、 $b+1 > 0$  であるから、相加相乗平均の不等式より、

$$b + f(c) = b+1 + \frac{2}{b+1} - 1$$

$$\geq 2\sqrt{(b+1) \cdot \frac{2}{b+1}} - 1$$

$$= 2\sqrt{2} - 1$$

となる。等号が成立するための条件は、

$$b+1 = \frac{2}{b+1}$$

$$\Leftrightarrow (b+1)^2 = 2$$

$$\therefore b = \sqrt{2} - 1 \quad (\because b > 0)$$

であるから、 $b + f(c)$  は  $b = \sqrt{2} - 1$  のときに最小値  $2\sqrt{2} - 1$  をとる。

$$\text{(答)} \quad b = \sqrt{2} - 1 \text{ のとき 最小値 } 2\sqrt{2} - 1$$

### Ⅲ

(i)

条件より  $\overrightarrow{OD} = (s, t)$  であるから,

$$\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OD} = (1-s, 2-t)$$

$$\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OD} = (2-s, 3-t)$$

$$\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD} = (6-s, 10-t)$$

となる。したがって,

$$\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow (1-s, 2-t) + (2-s, 3-t) + (6-s, 10-t) = (0, 0)$$

$$\Leftrightarrow (9-3s, 15-3t) = (0, 0)$$

$$\therefore s=3, t=5$$

となる。

(答)  $s=3, t=5$

(ii)

条件より  $\overrightarrow{OP} = (x, y)$  であるから, (i)と同様にして,

$$\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = (9-3x, 15-3y) \quad \dots \textcircled{1}$$

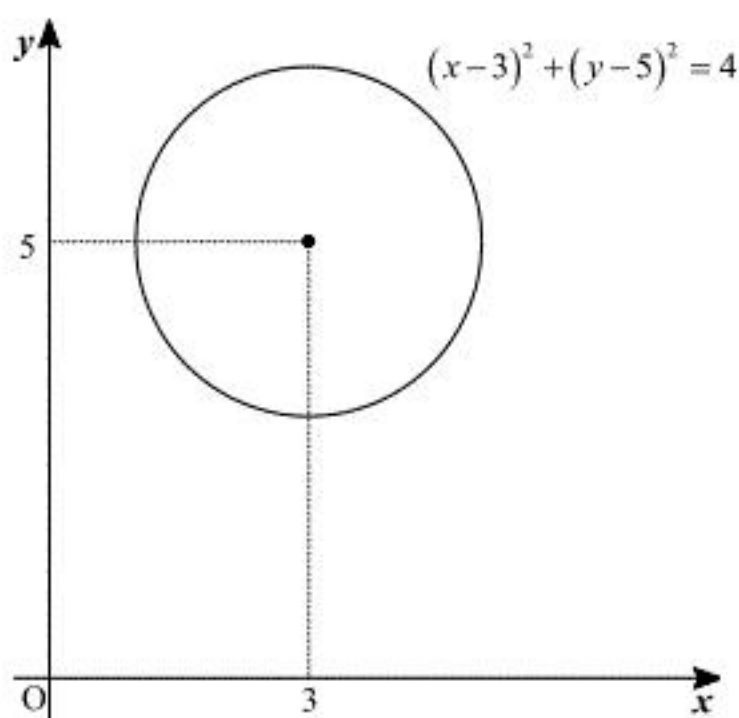
となる。①式について, 大きさの2乗を考えると,

$$|\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}|^2 = 36$$

$$\Leftrightarrow (9-3x)^2 + (15-3y)^2 = 36$$

$$\therefore (x-3)^2 + (y-5)^2 = 4$$

となるから, これを図示すると以下のようになる。



(答) 関係式:  $(x-3)^2 + (y-5)^2 = 4$ , 図: 前図

# IV

(i)

| $a \backslash b$ | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  |
|------------------|----|----|----|----|----|----|
| 1                | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  |
| 2                | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 |
| 3                | 7  | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 |
| 4                | 9  | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
| 5                | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
| 6                | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |

上表のように、縦に  $a$ 、横に  $b$  をとり、 $X$  の値を求める。18 以下の自然数のうち、8 の倍数であるのは 8 と 16 のみであるから、上表より  $X$  が 8 の倍数となる確率は  $\frac{5}{36}$  である。

(答)  $\frac{5}{36}$

(ii)

| $a \backslash b$ | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  |
|------------------|----|----|----|----|----|----|
| 1                | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
| 2                | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 |
| 3                | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 |
| 4                | 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 |
| 5                | 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 |
| 6                | 61 | 62 | 63 | 64 | 65 | 66 |

(i)と同様にして考える。66 以下の自然数のうち、8 の倍数であるものは 8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64

の 8 つであるから、上表より  $Y$  が 8 の倍数となる確率は  $\frac{5}{36}$  である。

(答)  $\frac{5}{36}$

(iii)

(ii)の表より、 $Y \geq 34$  となる確率は、

$$\frac{21}{36} = \frac{7}{12}$$

である。

(答)  $\frac{7}{12}$