

I

(i)

与えられた関数を変形すると,

$$\begin{aligned} f(x, y) &= (x+y) \left(\frac{1}{x} + \frac{4}{y} \right) \\ &= 5 + \frac{y}{x} + \frac{4x}{y} \end{aligned}$$

となる。ここで、 $x > 0, y > 0$ より、 $\frac{y}{x} > 0$ であるから、 $\frac{y}{x} = A (> 0)$ とおくと,

$$f(x, y) = 5 + \left(A + \frac{4}{A} \right)$$

となる。相加平均と相乗平均に関する不等式より,

$$\begin{aligned} 5 + \left(A + \frac{4}{A} \right) &\geq 5 + 2\sqrt{A \cdot \frac{4}{A}} \\ &= 9 \quad (\text{等号は, } A = 2 \text{ のときに成立}) \end{aligned}$$

となるから、 $f(x, y)$ は $y = 2x$ のときに最小値 9 をとることがわかる。

(答) 9

(ii)

$f(x, y)$ が最小となる (x, y) を (x_0, y_0) としたとき、(i) より、 $y_0 = 2x_0$ を満たす。このとき、与えられた方程式の両辺について、底を 3 とする対数をとることで

$$\begin{aligned} \log_3 3^{x_0} &= \log_3 a^{y_0} \\ \Leftrightarrow x_0 \log_3 3 &= 2x_0 \log_3 a \quad (\because y_0 = 2x_0) \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} &= \log_3 a \quad (\because x_0 > 0) \\ \therefore a &= \sqrt{3} \end{aligned}$$

と解くことができる。

(答) $\sqrt{3}$

II

(i)

2つの動点P, Qは、放物線 $y = 2x^2$ 上にあるから、 $P(p, 2p^2)$, $Q(q, 2q^2)$ とおける。 $\angle POQ = \frac{\pi}{2}$

となるように動くから、 p, q は条件

$$\begin{aligned}\overline{OP} \cdot \overline{OQ} &= 0 \quad \text{かつ} \quad |\overline{OP}| \neq 0 \quad \text{かつ} \quad |\overline{OQ}| \neq 0 \\ \Leftrightarrow pq(1+4pq) &= 0 \quad \text{かつ} \quad p \neq 0 \quad \text{かつ} \quad q \neq 0 \\ \Leftrightarrow pq &= -\frac{1}{4} \quad \dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

を満たしながら変化する。このとき、直線PQの方程式は、

$$\begin{aligned}y &= \frac{2q^2 - 2p^2}{q - p}(x - p) + 2p^2 \\ &= 2(p+q)(x-p) + 2p^2 \\ &= 2(p+q)x - 2pq \\ \therefore y &= 2(p+q)x + \frac{1}{2} \quad (\because \textcircled{1}) \quad \dots \textcircled{2}\end{aligned}$$

となる。ここで、線分PQが常にある定点を通るとき、直線PQも常に同じ定点を通らなければならない、 $\textcircled{1}$ を満たすような p, q の中でも特に、

$$(p, q) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right), \left(1, -\frac{1}{4}\right)$$

の場合に、直線 $\textcircled{2}$ が通ることが必要であるから、このような点は

$$\begin{aligned}\begin{cases} y = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)x + \frac{1}{2} \\ y = 2\left(1 - \frac{1}{4}\right)x + \frac{1}{2} \end{cases} \\ \therefore (x, y) = \left(0, \frac{1}{2}\right)\end{aligned}$$

に限られることがわかる。逆に、 $\textcircled{1}$ を満たす任意の p, q に対して、直線 $\textcircled{2}$ は点 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ を通る

ことが確認でき、さらに $\textcircled{1}$ より p, q は異符号であるから、点 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ は常に線分PQ上にあることがわかる。

(答) $\left(0, \frac{1}{2}\right)$

(ii)

線分PQの長さの2乗の値は、 $\textcircled{1}$ より、

$$\begin{aligned}PQ^2 &= (p-q)^2 + (2p^2 - 2q^2)^2 \\ &= (p-q)^2 + 4(p-q)^2(p+q)^2 \\ &= \{1+4(p+q)^2\}(p-q)^2 \\ &= \{1+4(p+q)^2\}\{(p+q)^2 - 4pq\} \\ &= \{1+4(p+q)^2\}\{(p+q)^2 + 1\} \\ &= 4(p+q)^4 + 5(p+q)^2 + 1\end{aligned}$$

と計算できる。PQ = $3\sqrt{3}$ であるとき、 $PQ^2 = 27$ であるから、上式より、

$$\begin{aligned}4(p+q)^4 + 5(p+q)^2 + 1 &= 27 \\ \Leftrightarrow 4(p+q)^4 + 5(p+q)^2 - 26 &= 0 \\ \Leftrightarrow \{4(p+q)^2 + 13\}\{(p+q)^2 - 2\} &= 0\end{aligned}$$

となる。ここで、 $4(p+q)^2 + 13 > 0$ であるから、

$$\begin{aligned}(p+q)^2 - 2 &= 0 \\ \therefore p+q &= \pm\sqrt{2} \quad \dots \textcircled{3}\end{aligned}$$

と求まる。逆に、 $\textcircled{1}$ かつ $\textcircled{3}$ を満たすような実数 p, q は、 t に関する2次方程式

$$t^2 \mp \sqrt{2}t - \frac{1}{4} = 0$$

の判別式が、

$$(\mp\sqrt{2})^2 - 4 \cdot 1 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = 3 (> 0)$$

であることより、存在するから、求める線分PQの傾きは、 $\textcircled{2}$ より、

$$2(p+q) = \pm 2\sqrt{2}$$

となることがわかる。

(答) $\pm 2\sqrt{2}$

III

(i)

$z = x + yi$ (ただし, x, y は実数) とおくと,

$$z^2 = (x^2 - y^2) + 2xyi$$

となるから, 方程式 $z^2 = 7 + 24i$ は,

$$(x^2 - y^2) + 2xyi = 7 + 24i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 7 \\ 2xy = 24 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^4 - 7x^2 - 144 = 0 \\ y = \frac{12}{x} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+4)(x-4)(x^2+9) = 0 \\ y = \frac{12}{x} \end{cases}$$

$$\therefore (x, y) = (4, 3), (-4, -3)$$

と解くことができる。したがって, 求める複素数 z は,

$$z = 4 + 3i, -4 - 3i$$

である。

(答) $z = 4 + 3i, -4 - 3i$

(ii)

$w = u + vi$ (ただし, u, v は整数) とおくと,

$$w^3 = (u^3 - 3uv^2) + (3u^2v - v^3)i$$

となるから, 方程式 $w^3 = 46 + 9i$ は,

$$(u^3 - 3uv^2) + (3u^2v - v^3)i = 46 + 9i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u(u^2 - 3v^2) = 46 & \cdots \text{①} \\ v(3u^2 - v^2) = 9 & \cdots \text{②} \end{cases}$$

と変形できる。よって, ①かつ②を満たす整数の組 (u, v) をすべて求めればよい。②より,

$$v = \pm 1, \pm 3, \pm 9$$

が候補となるが, $v = \pm 1$ のとき, ②は

$$3u^2 = 1 \pm 9$$

となるから, これを満たす整数 u は存在しない。また, $v = \pm 3$ のとき, ②は

$$3u^2 = 9 \pm 3$$

$$\Leftrightarrow u^2 = 3 \pm 1$$

となるから, $v = 3$ のとき, $u = \pm 2$ が候補となることがわかる。これを①に代入すると,

$$(u, v) = (-2, 3)$$

のみ, これを満たすことがわかる。さらに, $v = \pm 9$ のとき, ②は

$$3u^2 = 81 \pm 1$$

となるから, これを満たす整数 u は存在しない。したがって, 求める複素数 w は,

$$w = -2 + 3i$$

であることがわかる。

(答) $w = -2 + 3i$

IV

(i)

以下、 $k \geq 3$ で考える。最初に取り出すカードの番号が1となる確率は、

$$\frac{1}{1+2+\cdots+k} = \frac{1}{\frac{1}{2}k(k+1)} = \frac{2}{k(k+1)}$$

であり、また、このとき二度目に取り出すカードの番号が2となる確率は、

$$\frac{2}{\frac{1}{2}k(k+1)-1} = \frac{2}{\frac{1}{2}(k+2)(k-1)} = \frac{4}{(k+2)(k-1)}$$

となる。よって、求める確率は

$$\frac{2}{k(k+1)} \cdot \frac{4}{(k+2)(k-1)} = \frac{8}{(k-1)k(k+1)(k+2)}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{8}{(k-1)k(k+1)(k+2)}$$

(ii)

箱の中のカードをすべて区別して考える。二度目までのカードの取り出し方は、全部で

$$\frac{1}{2}k(k+1) \left\{ \frac{1}{2}k(k+1)-1 \right\} \quad (\text{通り})$$

あり、これらは同様に確からしく起こる。また、二度目に取り出したカードの番号が2であるような取り出し方の総数は、二度目に取り出したカードを選ぶ方法、最初にそれ以外のカードを選んだ方法という順で考えることで

$$2 \cdot \left\{ \frac{1}{2}k(k+1)-1 \right\} \quad (\text{通り})$$

となる。したがって、求める確率は

$$\frac{2 \cdot \left\{ \frac{1}{2}k(k+1)-1 \right\}}{\frac{1}{2}k(k+1) \left\{ \frac{1}{2}k(k+1)-1 \right\}} = \frac{4}{k(k+1)}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{4}{k(k+1)}$$