

〔解答〕

ア (h) イ (e) ウ (b) エ (c)

オ (g) カ (g) キ (c) ク (c)

〔解説〕

n 回移動した後に A が各頂点にいる確率の和が 1 となることから、

$$p_n + 2q_n = 1 \quad \cdots \textcircled{1}$$

が成立する。さて、2 回移動した後に A が P にいるためには、

$$P \rightarrow Q \rightarrow P, P \rightarrow R \rightarrow P$$

のいずれかで移動すればよいので、その確率は

$$p_2 = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

となる。したがって、①に $n=2$ を代入して

$$\frac{1}{2} + 2q_2 = 1 \quad \therefore q_2 = \frac{1}{4}$$

を得る。次に、 $n+1$ 回移動した後に A が P にいるためには、

n 回移動した後に Q にいる場合、 $n+1$ 回目に $Q \rightarrow P$ と移動する

n 回移動した後に R にいる場合、 $n+1$ 回目に $R \rightarrow P$ と移動する

のいずれかで移動すればよいので、漸化式

$$p_{n+1} = \frac{1}{2}q_n + \frac{1}{2}q_n$$

$$\Leftrightarrow p_{n+1} = q_n \quad \cdots \textcircled{2}$$

が成り立つ。また、 $n+1$ 回移動した後に A が Q にいるためには、

n 回移動した後に P にいる場合、 $n+1$ 回目に $P \rightarrow Q$ と移動する

n 回移動した後に R にいる場合、 $n+1$ 回目に $R \rightarrow Q$ と移動する

のいずれかで移動すればよいので、漸化式

$$q_{n+1} = \frac{1}{2}p_n + \frac{1}{2}q_n$$

$$\Leftrightarrow q_{n+1} = \frac{p_n + q_n}{2} \quad \cdots \textcircled{3}$$

が成り立つ。②から③を引くと、

$$p_{n+1} - q_{n+1} = -\frac{1}{2}(p_n - q_n)$$

を得る。そこで、 $s_n = p_n - q_n$ とおくと、漸化式

$$s_{n+1} = -\frac{1}{2}s_n$$

を得る。よって、数列 $\{s_n\}$ は、初項 $s_1 = p_1 - q_1 = -\frac{1}{2}$ 、公比 $-\frac{1}{2}$ の等比数列であるから、

$$s_n = -\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\Leftrightarrow p_n - q_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n \quad \cdots \textcircled{4}$$

となる。①、④より q_n を消去すると

$$p_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

と求まる。

次に、B が n 回移動した後に座標 $n-2k$ の点にいるために、正の方向に a 回、負の方向に b 回だけ移動すればよいとすると、

$$\begin{cases} a+b=n \\ a-b=n-2k \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} a=n-k \\ b=k \end{cases}$$

となる。したがって、このような確率は

$${}_nC_k \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{{}_nC_k}{2^n}$$

となる。同様の考え方で、B が $3n$ 回移動した後に 3 の倍数を座標とする点にいる確率を求める。移動先の座標 $a-b$ の値の範囲は、 $-3n \leq a-b \leq 3n$ であるから、 $a-b$ が 3 の倍数となるとき、

$$a-b = 3n-3l \quad (l=0, 1, 2, \dots, 2n)$$

とおくことができる。これと $a+b=3n$ より、

$$a = 3n - \frac{3}{2}l, b = \frac{3}{2}l$$

となるが、 a, b が整数となるためには l が偶数でなければならないことがわかる。よって、

$$l = 2i \quad (i=0, 1, 2, \dots, n)$$

とおくと、

$$a = 3n-3i, b = 3i \quad (i=0, 1, 2, \dots, n)$$

となる。したがって、B が $3n$ 回移動した後に 3 の倍数を座標とする点にいる確率は

$$\sum_{i=0}^n {}_{3n}C_{3i} \left(\frac{1}{2}\right)^{3n-3i} \left(\frac{1}{2}\right)^{3i} = \left(\frac{1}{2}\right)^{3n} \sum_{i=0}^n {}_{3n}C_{3i}$$

となる。これが、 p_{3n} と等しくなることから

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{3n} \sum_{i=0}^n {}_{3n}C_{3i} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^{3n-1}$$

$$\therefore \sum_{i=0}^n {}_{3n}C_{3i} = \frac{2^{3n} + 2(-1)^{3n}}{3}$$

が導かれる。

II

〔解答〕

ケ ① コ ⑤ サ ① シ ⑥ ス ⑦ セ ①

〔解説〕

ケ、コ

線分 OP の傾きは $\frac{1}{t}$ であるから、線分 OP の垂直二等分線 ℓ は、点 $\left(\frac{t}{2}, \frac{1}{2}\right)$ を通る傾き $-t$ の直

線となる。したがって、その方程式は

$$y = -t \left(x - \frac{t}{2} \right) + \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow y = -tx + \frac{t^2 + 1}{2}$$

である。

サ

ℓ が点 A を通るとき、

$$0 = -t \cdot 2 + \frac{t^2 + 1}{2}$$

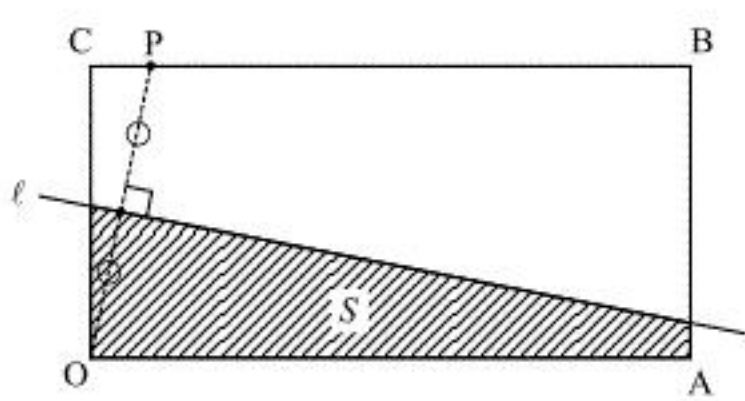
$$\Leftrightarrow t^2 - 4t + 1 = 0$$

である。ここで $0 \leq t \leq 2$ であるから、

$$\alpha = 2 - \sqrt{3}$$

である。

シ



$0 \leq t \leq \alpha$ のとき、 ℓ と線分 OC の交点の y 座標は

$$\frac{t^2 + 1}{2}$$

であり、 ℓ と線分 AB の交点の y 座標は

$$-2t + \frac{t^2 + 1}{2} = \frac{t^2 - 4t + 1}{2}$$

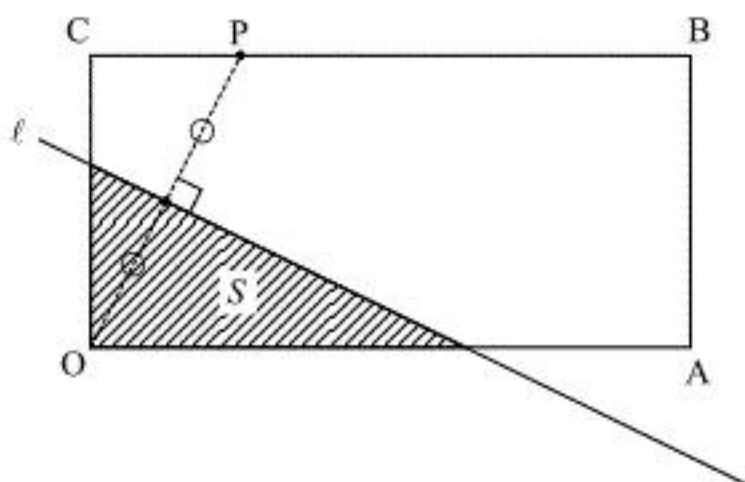
である。よって

$$S = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \left(\frac{t^2 + 1}{2} + \frac{t^2 - 4t + 1}{2} \right)$$

$$= (t - 1)^2$$

である。

ス



$\alpha \leq t \leq 1$ のとき、 ℓ と線分 OA の交点の x 座標は

$$0 = -tx + \frac{t^2 + 1}{2}$$

$$\therefore x = \frac{t^2 + 1}{2t}$$

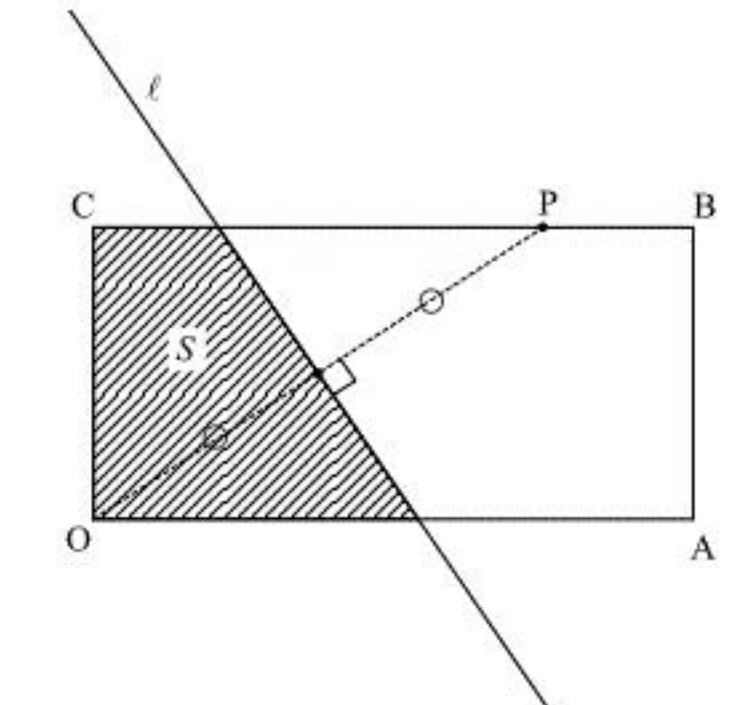
となるから、

$$S = \frac{1}{2} \times \frac{t^2 + 1}{2} \times \frac{t^2 + 1}{2t}$$

$$= \frac{(t^2 + 1)^2}{8t}$$

である。

セ



$1 \leq t \leq 2$ のとき、 $S = \frac{t}{2}$ となり単調増加である。また、 $0 \leq t \leq \alpha$ のとき、 $S = (t - 1)^2$ となり

単調減少である。よって、 S が最小値をとるのは $\alpha \leq t \leq 1$ の範囲であるとわかる。この範囲

で $f(t) = \frac{(t^2 + 1)^2}{8t}$ とおくと、

$$f'(t) = \frac{2(t^2 + 1) \cdot 2t \cdot 8t - (t^2 + 1)^2 \cdot 8}{64t^2}$$

$$= \frac{(t^2 + 1)(3t^2 - 1)}{8t^2}$$

となる。ここで、値の大小関係について

$$\frac{3}{2} < \sqrt{3} \Leftrightarrow 2 < \frac{4}{3}\sqrt{3}$$

$$\therefore 2 - \sqrt{3} < \frac{\sqrt{3}}{3}$$

となるから、 $f(t)$ の増減表は以下ようになる。

t	$2 - \sqrt{3}$	$\cdots$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$		1
$f'(t)$		-	0	+	
$f(t)$		$\searrow$	最小	$\nearrow$	

よって、 S は $t = \frac{\sqrt{3}}{3}$ のときに最小値

$$\frac{\left\{ \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \right)^2 + 1 \right\}^2}{8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$$

をとる。

III

(1)

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4x^3 - 4x^2 + a(4x^2 - 4x) + 2b(2x - 2) \\ &= 4x^2(x-1) + 4ax(x-1) + 4b(x-1) \\ &= 4(x-1)(x^2 + ax + b) \end{aligned}$$

となる。したがって、 $f'(x)=0$ が相異なる3つの実数解をもつための条件は、方程式 $x^2 + ax + b = 0$ が $x \neq 1$ を満たす異なる2つの実数解をもつことであるから、

$$a^2 - 4b > 0 \quad \text{かつ} \quad 1 + a + b \neq 0$$

となる。

$$(\text{答}) \quad a^2 - 4b > 0 \quad \text{かつ} \quad 1 + a + b \neq 0$$

(2)

方程式 $f'(x)=0$ の解の個数で場合分けをして考える。

[1] $f'(x)=0$ の相異なる実数解が3つである場合

関数 $f(x)$ は3か所で極値をとるため、不適である。

[2] $f'(x)=0$ の相異なる実数解が2つである場合

方程式 $x^2 + ax + b = 0$ が $x \neq 1$ である重解をもつ場合か、方程式 $x^2 + ax + b = 0$ が $x=1$ と $x \neq 1$ である解をもつ場合の2通りが考えられる。いずれの場合も、方程式 $f'(x)=0$ の重解となる点では $f(x)$ の増減が変化しないため、 $f(x)$ が極値をとる x の値はただ1つであるから、題意をみたす。

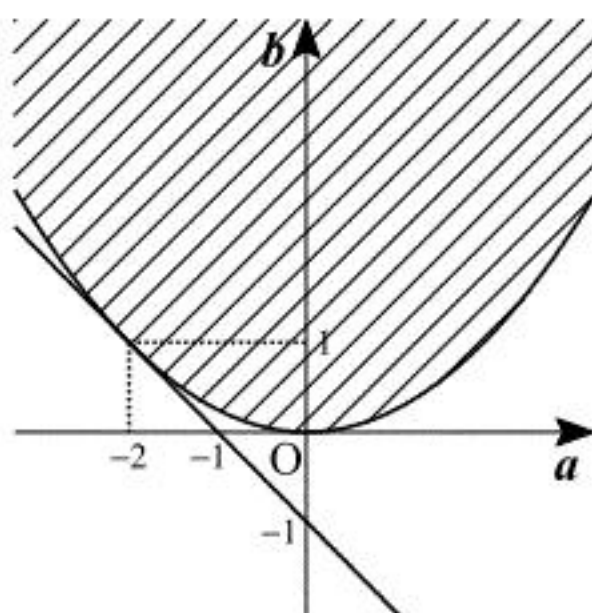
[3] $f'(x)=0$ の相異なる実数解が1つである場合

方程式 $x^2 + ax + b = 0$ が $x=1$ (重解) となる場合か、方程式 $x^2 + ax + b = 0$ が実数解をもたない場合の2通りが考えられる。いずれの場合も、 $f(x)$ は $x=1$ でのみ極値をとるため、題意をみたす。

以上[1][2][3]より、関数 $f(x)$ が極値をとる x の値がただ1つであるための条件は、方程式 $f'(x)=0$ が相異なる3つの実数解をもたないことである。したがって、(1)の結果を用いてこの条件を求めると、

$$a^2 - 4b \leq 0 \quad \text{または} \quad 1 + a + b = 0$$

となる。これを図示すると、以下の図の斜線部分(ただし、境界をすべて含む)および直線となる。



$$(\text{答}) \quad \text{条件: } a^2 - 4b \leq 0 \quad \text{または} \quad 1 + a + b = 0, \quad \text{図: 前図}$$

(3)

[1] 方程式 $x^2 + ax + b = 0$ が $x \neq 1$ である重解をもつ場合

$1 + a + b \neq 0$ であり、 $f(x)$ は $x=1$ で極値をとる。

[2] 方程式 $x^2 + ax + b = 0$ が $x=1$ と $x \neq 1$ である解をもつ場合

$x=1$ が $x^2 + ax + b = 0$ の解であることから、

$$1 + a + b = 0 \Leftrightarrow b = -(1 + a)$$

より、

$$\begin{aligned} x^2 + ax - (a+1) &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-1)(x+a+1) &= 0 \\ \therefore x &= 1, -a-1 \end{aligned}$$

となる。したがって、 $a \neq -2$ のとき、 $f(x)$ は $x = -a-1$ で極値をとる。

[3] 方程式 $x^2 + ax + b = 0$ が $x=1$ (重解) となる場合

[2]と同様に $1 + a + b = 0$ が成立し、もう1つの解が $x = -a-1$ であったことから、

$$\begin{aligned} -a-1 &= 1 \\ \therefore a &= -2 \end{aligned}$$

となる。 $f(x)$ は $x=1 (= -a-1)$ で極値をとる。

[4] 方程式 $x^2 + ax + b = 0$ が実数解をもたない場合

$1 + a + b \neq 0$ であり、方程式 $f'(x)=0$ の実数解は $x=1$ のみとなるから、 $f(x)$ は $x=1$ で極値をとる。

以上[1][2][3][4]より、 $1 + a + b = 0$ のとき $f(x)$ は $x = -a-1$ で極値をとり、 $1 + a + b \neq 0$ のとき $f(x)$ は $x=1$ で極値をとることがわかる。

$$(\text{答}) \quad 1 + a + b = 0 \text{ のとき } x = -a-1, \quad 1 + a + b \neq 0 \text{ のとき } x = 1$$

IV

(1)

不定積分を求めると、

$$\begin{aligned}
 \int t \log(t+1) dt &= \int \{(t+1) \log(t+1) - \log(t+1)\} dt \\
 &= \int \left\{ \left(\frac{1}{2}(t+1)^2 \right)' \log(t+1) - (t+1)' \log(t+1) \right\} dt \\
 &= \frac{1}{2}(t+1)^2 \log(t+1) - (t+1) \log(t+1) - \int \left(\frac{t+1}{2} - 1 \right) dt \\
 &= \frac{1}{2}(t+1)(t-1) \log(t+1) - \int \frac{t-1}{2} dt \\
 &= \frac{1}{2}(t+1)(t-1) \log(t+1) - \frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{2}t + C \\
 &= \frac{1}{2}(t+1)(t-1) \log(t+1) - \frac{1}{4}t(t-2) + C \quad (\text{ただし, } C \text{ は積分定数})
 \end{aligned}$$

となる。これを用いて $G(x)$ を求めると、

$$\begin{aligned}
 G(x) &= \frac{1}{2}(x+2)x \log(x+2) - \frac{1}{4}(x+1)(x-1) - \frac{1}{2}(x+1)(x-1) \log(x+1) + \frac{1}{4}x(x-2) \\
 &= \frac{1}{2}(x+2)x \log(x+2) - \frac{1}{2}(x+1)(x-1) \log(x+1) - \frac{1}{4}(2x-1)
 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \begin{cases} \int t \log(t+1) dt = \frac{1}{2}(t+1)(t-1) \log(t+1) - \frac{1}{4}t(t-2) + C \quad (\text{ただし, } C \text{ は積分定数}) \\ G(x) = \frac{1}{2}(x+2)x \log(x+2) - \frac{1}{2}(x+1)(x-1) \log(x+1) - \frac{1}{4}(2x-1) \end{cases}$$

(2)

 $G'(x)$ および $G''(x)$ を求めると、

$$\begin{aligned}
 G'(x) &= (x+1) \log(x+2) - x \log(x+1) \\
 G''(x) &= \log(x+2) + \frac{x+1}{x+2} - \log(x+1) - \frac{x}{x+1} \\
 &= \log(x+2) + 1 - \frac{1}{x+2} - \log(x+1) - 1 + \frac{1}{x+1} \\
 &= \left\{ \log(x+2) - \frac{1}{x+2} \right\} - \left\{ \log(x+1) - \frac{1}{x+1} \right\}
 \end{aligned}$$

となる。ここで、関数 $h(t) = \log t - \frac{1}{t}$ ($t > 0$) について考えると、

$$h'(t) = \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2} = \frac{t+1}{t^2} > 0$$

となるから、 $h(t)$ は $t > 0$ の範囲で単調増加である。したがって $x > -1$ のとき、

$$\begin{aligned}
 h(x+2) &> h(x+1) \\
 \Leftrightarrow G''(x) &= h(x+2) - h(x+1) > 0
 \end{aligned}$$

が成り立つから、 $G'(x)$ は $x > -1$ の範囲で単調増加である。

(証明終)

(3)

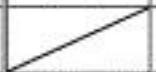
導関数 $G'(x)$ は $-\frac{1}{2} \leq x \leq 0$ の範囲で連続であり、この区間における端点での値は

$$\begin{aligned}
 G'\left(-\frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{2} \log \frac{3}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) \log \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \log \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}\right) < 0 \\
 G'(0) &= \log 2 > 0
 \end{aligned}$$

となるから、中間値の定理より、方程式 $G'(x) = 0$ は $-\frac{1}{2} < x < 0$ の範囲に少なくとも1つの解をもつ。また、(2)の結果より、導関数 $G'(x)$ は $x > -1$ で増加し、 $-\frac{1}{2} < x_1 < x_2 < 0$ を満たす実数 x_1, x_2 に対して

$$G'(x_1) < G'(x_2)$$

を満たすから、方程式 $G'(x) = 0$ は $-\frac{1}{2} < x < 0$ の範囲にただ1つの解をもつことがわかる。この値を α とすると、 $G(x)$ の増減表は以下の通りとなる。

x	(-1)	$\cdots$	α	$\cdots$
$G'(x)$		$-$	0	$+$
$G(x)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$

以上より、 $G(x)$ が最小となる x がただ1つ存在し、 $-\frac{1}{2} < x < 0$ の範囲にある。

(証明終)

(4)

(1)の結果に $x = -\frac{1}{2}$ を代入して計算すると、

$$\begin{aligned}
 G\left(-\frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \log \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \log \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \cdot (-2) \\
 &= -\frac{3}{8} \log \frac{3}{2} + \frac{3}{8} \log \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\
 &= \frac{1}{2} - \frac{3}{8} \log \left(\frac{3}{2} \cdot 2\right) \\
 &= \frac{1}{2} - \frac{3}{8} \log 3
 \end{aligned}$$

となる。このとき、 $2 < e < 3$ より $1 < \log 3$ であるから、

$$G(\alpha) < G\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{3}{8} \log 3 < \frac{1}{2} - \frac{3}{8} = \frac{1}{8}$$

となり、 $G(x)$ の最小値 $G(\alpha)$ は $\frac{1}{8}$ より小さいことが示された。

(証明終)