

2014 年 度 入 学 試 験 問 題

数 学

(試験時間 15:20～17:00 100 分)

1. 解答用紙は、記述解答用紙とマーク解答用紙の2種類がありますので注意してください。
2. 解答は、必ず解答欄に記入してください。なお、解答欄以外に書くと無効となりますので注意してください。
3. 解答は、HBの鉛筆またはシャープペンシルを使用し、訂正する場合は、プラスチック製の消しゴムを使用してください。特に、マーク解答用紙には鉛筆のあとや消しくずを残さないでください。また、折りまげたり、汚したりしないでください。記述解答用紙の下敷きにマーク解答用紙を使用することは絶対にさけてください。
4. 解答用紙には、受験番号と氏名を必ず記入してください。
5. マーク解答用紙の受験番号および受験番号のマーク記入は、コンピュータ処理上非常に重要なので、誤記のないよう特に注意してください。
6. 設問文にある点数は、満点が100点となるような配点表示になっていますが、数学科は満点が200点であり、各問の配点は2倍になります。

(設問は 2 ページより始まる。)

I 次の問題文の空欄にもっとも適する答えを解答群から選び、その記号をマーク解答用紙にマークせよ。ただし、同じ記号を2度以上用いてもよい。(20点)

動点 A は正三角形 PQR の頂点を移動する。各回の移動の際に、動点 A はその時いる頂点から他の2つの頂点のどちらかに、それぞれ $\frac{1}{2}$ の確率で移動する。動点 A が点 P を出発して、 n 回移動した後に点 P にいる確率を p_n 、点 Q にいる確率を q_n とおく。このとき、点 R にいる確率も q_n となる。例えば $n = 1, 2$ の場合、 $p_1 = 0$ 、 $q_1 = \frac{1}{2}$ であり、 $p_2 = \boxed{\text{ア}}$ 、 $q_2 = \boxed{\text{イ}}$ である。一般の自然数 n に対して p_n を求めよう。 p_{n+1} 、 q_{n+1} はそれぞれ p_n 、 q_n を用いて $p_{n+1} = \boxed{\text{ウ}}$ 、 $q_{n+1} = \boxed{\text{エ}}$ と表される。 $s_n = p_n - q_n$ とおき、数列 $\{s_n\}$ が満たす漸化式を利用して一般項を求めると、 $s_n = \boxed{\text{オ}}$ となる。また、 n 回移動した後に、動点 A が各頂点にいる確率の和は 1 であるから、 $p_n = \boxed{\text{カ}}$ がわかる。

一方、数直線上の動点 B は原点を出発し、整数を座標とする点を移動する。各回の移動の際に、動点 B はその時いる座標 m の点から座標 $m - 1$ 、 $m + 1$ の2点のどちらかに、それぞれ $\frac{1}{2}$ の確率で移動する。動点 B が正負どちらの向きに何回動くかを考えることにより、B が n 回移動後に座標 $n - 2k$ (ただし、 $k = 0, 1, 2, \dots, n$) の点にいる確率を求めると、 $\boxed{\text{キ}}$ となる。

さて、動点 B が $3n$ 回移動後に 3 の倍数を座標とする点にいる確率は、動点 A が $3n$ 回移動後に点 P にいる確率 p_{3n} に等しい。よって、等式 $\boxed{\text{ク}}$ が導かれる。

問題 I のア、イの解答群

- (a) 0 (b) $\frac{1}{8}$ (c) $\frac{5}{32}$ (d) $\frac{3}{16}$ (e) $\frac{1}{4}$ (f) $\frac{5}{16}$
 (g) $\frac{3}{8}$ (h) $\frac{1}{2}$ (i) $\frac{5}{8}$ (j) $\frac{3}{4}$ (k) 1

問題 I の ウ, エ の解答群

- (a) p_n (b) q_n (c) $\frac{p_n}{2}$ (d) $\frac{q_n}{2}$ (e) $\frac{p_n + q_n}{2}$
 (f) $\frac{p_n - q_n}{2}$ (g) $\frac{q_n - p_n}{2}$ (h) $\frac{p_n + q_n}{3}$ (i) $\frac{2p_n + q_n}{3}$ (j) $\frac{p_n + 2q_n}{3}$

問題 I の オ の解答群

- (a) $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ (b) $-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ (c) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ (d) $-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$
 (e) $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ (f) $-\left(\frac{1}{2}\right)^n$ (g) $\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ (h) $-\left(-\frac{1}{2}\right)^n$

問題 I の カ の解答群

- (a) $\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ (b) $\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ (c) $\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$
 (d) $\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ (e) $\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ (f) $\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$
 (g) $\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ (h) $\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$

問題 I の キ の解答群

- (a) $\frac{n-1}{2^{n-1}}C_k$ (b) $\frac{n-1}{2^{n-1}}C_{2k}$ (c) $\frac{n}{2^{n-1}}C_k$
 (d) $\frac{n}{2^{n-1}}C_{2k}$ (e) $\frac{n}{2^n}C_k$ (f) $\frac{n}{2^n}C_{2k}$

問題 I の ク の解答群 (下記の N は $N \leq \frac{n}{2} < N+1$ を満たす整数を表す。)

- (a) $\sum_{i=0}^n {}_{3n}C_{3i} = \frac{-(-2)^{3n} - 2}{3}$ (b) $\sum_{i=0}^N {}_{3n}C_{6i} = \frac{2^{3n-3} - 2(-1)^{3n}}{3}$
 (c) $\sum_{i=0}^n {}_{3n}C_{3i} = \frac{2^{3n} - 10(-1)^{3n}}{9}$ (d) $\sum_{i=0}^N {}_{3n}C_{6i} = \frac{(-2)^{3n-3} + 2}{3}$
 (e) $\sum_{i=0}^n {}_{3n}C_{3i} = \frac{2^{3n} + 2(-1)^{3n}}{3}$ (f) $\sum_{i=0}^N {}_{3n}C_{6i} = \frac{-(-2)^{3n-3} + 10}{9}$

(設問は次ページに続く。)

- II 次の問題文の空欄にもっとも適する答えを解答群から選び、その記号をマーク解答用紙にマークせよ。ただし、同じ記号を2度以上用いてもよい。(20点)

座標平面上で $O(0,0)$, $A(2,0)$, $B(2,1)$, $C(0,1)$ とする。線分 CB 上に点 $P(t,1)$ ($0 \leq t \leq 2$) をとり、線分 OP の垂直二等分線を ℓ とする。

ℓ の方程式を $y = px + q$ とする。 p , q をそれぞれ t で表すと、 $p = \boxed{\text{ケ}}$, $q = \boxed{\text{コ}}$ である。 ℓ が点 A を通るとき t の値を α とすると、 $\alpha = \boxed{\text{サ}}$ であり、 ℓ が点 C を通るとき t の値は 1 である。

長方形 $OABC$ は直線 ℓ により2つの部分に分けられるが、そのうち原点 O を含む方の面積を S とする。

- (1) $0 \leq t \leq \alpha$ のとき

直線 ℓ は線分 OC および線分 AB と共有点をもつ。 S を t で表すと、 $S = \boxed{\text{シ}}$ である。したがって、 S は $0 \leq t \leq \alpha$ において単調に減少する。

- (2) $\alpha \leq t \leq 1$ のとき

直線 ℓ は線分 OA および線分 OC と共有点をもち、 $S = \boxed{\text{ス}}$ である。

- (3) $1 \leq t \leq 2$ のとき

直線 ℓ は線分 OA および線分 CB と共有点をもち、 $S = \frac{t}{2}$ となる。

以上をもとに、 $0 \leq t \leq 2$ における S の最小値 m を求めると、 $m = \boxed{\text{セ}}$ である。

問題 II のケ、コ の解答群

- | | | | | |
|-------------------|-------------------|------------------|---------------------|---------------------|
| Ⓐ 1 | Ⓑ -1 | Ⓒ $\frac{1}{2}$ | Ⓓ $-\frac{1}{2}$ | Ⓔ t |
| Ⓕ $-t$ | Ⓖ $\frac{t}{2}$ | Ⓗ $-\frac{t}{2}$ | Ⓘ $\frac{1}{t}$ | Ⓙ $-\frac{1}{t}$ |
| Ⓚ $\frac{1}{2t}$ | Ⓛ $-\frac{1}{2t}$ | Ⓜ $t+1$ | Ⓝ $t-1$ | ⓪ $\frac{t+1}{2}$ |
| Ⓟ $\frac{t-1}{2}$ | Ⓢ t^2+1 | Ⓡ t^2-1 | Ⓢ $\frac{t^2+1}{2}$ | Ⓣ $\frac{t^2-1}{2}$ |

問題 II の サ の解答群

- | | | | |
|---------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| Ⓐ 1 | Ⓑ $\sqrt{3}$ | Ⓒ $\frac{1}{2}$ | Ⓓ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ |
| Ⓔ $-1+\sqrt{3}$ | Ⓕ $2-\sqrt{3}$ | Ⓖ $-2+2\sqrt{3}$ | Ⓗ $3-\sqrt{3}$ |
| Ⓘ $\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$ | Ⓛ $\frac{2-\sqrt{3}}{2}$ | Ⓚ $\frac{3-\sqrt{3}}{2}$ | Ⓣ $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ |

問題 II の シ、 ス の解答群

- | | | | |
|------------------------|--------------------------|------------------------|--------------------------|
| Ⓐ $\frac{t^2}{2}$ | Ⓑ t^2 | Ⓒ $2t^2$ | |
| Ⓓ $\frac{(t-1)^2}{2}$ | Ⓔ $(t-1)^2$ | Ⓕ $2(t-1)^2$ | |
| Ⓖ $\frac{t^2-2t+2}{2}$ | Ⓗ t^2-2t+2 | Ⓘ $2(t^2-2t+2)$ | |
| Ⓛ $\frac{t^2+1}{4t}$ | Ⓚ $\frac{(t^2+1)^2}{4t}$ | Ⓝ $\frac{t(t^2+1)}{4}$ | Ⓜ $\frac{t(t^2+1)^2}{4}$ |
| Ⓝ $\frac{t^2+1}{8t}$ | ⓪ $\frac{(t^2+1)^2}{8t}$ | Ⓟ $\frac{t(t^2+1)}{8}$ | Ⓣ $\frac{t(t^2+1)^2}{8}$ |

問題 II の セ の解答群

- | | | | |
|------------------------|-------------------------|------------------------|-------------------------|
| Ⓐ $\frac{1}{3}$ | Ⓑ $\frac{2}{3}$ | Ⓒ $\frac{1}{9}$ | Ⓓ $\frac{2}{9}$ |
| Ⓔ $\frac{\sqrt{2}}{3}$ | Ⓕ $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ | Ⓖ $\frac{\sqrt{2}}{9}$ | Ⓗ $\frac{2\sqrt{2}}{9}$ |
| Ⓘ $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | Ⓛ $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ | Ⓚ $\frac{\sqrt{3}}{9}$ | Ⓝ $\frac{2\sqrt{3}}{9}$ |
| Ⓜ $\frac{\sqrt{6}}{3}$ | Ⓢ $\frac{2\sqrt{6}}{3}$ | Ⓡ $\frac{\sqrt{6}}{9}$ | Ⓢ $\frac{2\sqrt{6}}{9}$ |

(設問は次ページに続く。)

III a, b を定数とし、4 次関数 $f(x)$ を次のように定める。

$$f(x) = x^4 - \frac{4}{3}x^3 + a\left(\frac{4}{3}x^3 - 2x^2\right) + 2b(x^2 - 2x)$$

以下の問いに答えよ。(30 点)

- (1) 方程式 $f'(x) = 0$ が相異なる 3 つの実数解をもつための a, b の条件を求めよ。
- (2) 関数 $f(x)$ が極値をとる x の値がただ 1 つであるための a, b の条件を求め、その条件が表す図形を ab 平面上に図示せよ。
- (3) a, b が (2) で求めた条件をみたすとき、 $f(x)$ が極値をとる x の値を求めよ。ただし、 x の値を表すのに必要ならば a を用いてよい。また、極値は求めなくてよい。

(設問は次ページに続く。)

IV 関数

$$G(x) = \int_x^{x+1} t \log(t+1) dt \quad (x > -1)$$

について、以下の問いに答えよ。(30 点)

- (1) 不定積分 $\int t \log(t+1) dt$ を求め、 $G(x)$ を求めよ。
- (2) 導関数 $G'(x)$ は $x > -1$ で増加することを示せ。
- (3) $G(x)$ が最小となる x がただ 1 つ存在し、 $-\frac{1}{2} < x < 0$ の範囲にあることを示せ。
- (4) $G\left(-\frac{1}{2}\right)$ を求め、 $G(x)$ の最小値は $\frac{1}{8}$ より小さいことを示せ。必要ならば、 $2 < e < 3$ であることを用いてよい。

(以下計算用紙)

(計算用紙)

(計算用紙)

(計算用紙)

(計算用紙)

