

I

【解答】

(1)	$(x+1)(x+7)(2x-1)$	(4)	125
(2)	$3 < x$	(5)	$3x^2 - 5x + 2$
(3)	210 通り	(6)	9

【解説】

(1)

$$f(x) = 2x^3 + 15x^2 + 6x - 7$$

とおくと

$$f(-1) = 0$$

であるから、因数定理より $f(x)$ は $x+1$ を因数にもつ。これを利用して

$$\begin{aligned} f(x) &= (x+1)(2x^2 + 13x - 7) \\ &= (x+1)(x+7)(2x-1) \end{aligned}$$

となる。

(2)

$$\begin{aligned} 2^{2x} - 2^{x+2} - 32 &> 0 \\ \Leftrightarrow (2^x)^2 - 4 \cdot 2^x - 32 &> 0 \end{aligned}$$

となる。ここで、 $X = 2^x$ とおくと、 $X > 0$ のもとで

$$\begin{aligned} X^2 - 4X - 32 &> 0 \\ \Leftrightarrow (X+4)(X-8) &> 0 \\ \Leftrightarrow X > 8 \quad (\because X > 0) \end{aligned}$$

となるから、求める不等式 $2^{2x} - 2^{x+2} - 32 > 0$ の解は

$$\begin{aligned} X &> 8 \\ \Leftrightarrow 2^x &> 8 \\ \Leftrightarrow x &> 3 \end{aligned}$$

である。

(3)

赤玉 3 個、白球 2 個、青玉 2 個を 1 列に並べるとき、7 個の玉の置く場所から赤玉の置く場所を 3 個選ぶ場合の数は ${}_7C_3$ 通りあり、残りの 4 個の場所から白球の置く場所を 2 個選ぶ場合の数は ${}_4C_2$ 通りあり、このもとで青玉を置く場所は 1 通りに決まる。よって、求める玉の並べ方は全部で

$${}_7C_3 \times {}_4C_2 = 210 \text{ 通り}$$

ある。

(4)

実数 k を用いて

$$k = 8^{\log_2 5}$$

とおくと

$$\begin{aligned} \log_2 k &= \log_2 8^{\log_2 5} \\ &= \log_2 5 \times \log_2 8 \\ &= 3 \log_2 5 \\ &= \log_2 5^3 \\ &= \log_2 125 \end{aligned}$$

となるから

$$(k =) 8^{\log_2 5} = 125$$

である。

(5)

2 次関数 $f(x)$ を実数 a, b, c ($a \neq 0$) を用いて

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

とおくと

$$f'(x) = 2ax + b$$

であるから

$$\begin{aligned} &\begin{cases} f(0) = 2 \\ f'(0) = -5 \\ f'(1) = 1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} c = 2 \\ b = -5 \\ 2a + b = 1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &(a, b, c) = (3, -5, 2) \end{aligned}$$

となる。これは $a \neq 0$ を満たす。よって、求める 2 次関数 $f(x)$ は

$$f(x) = 3x^2 - 5x + 2$$

である。

(6)

$$\begin{aligned} \int_{-1}^2 (2x^2 - 4x + 3) dx &= \left[\frac{2}{3}x^3 - 2x^2 + 3x \right]_{-1}^2 \\ &= \left(\frac{2}{3} \cdot 2^3 - 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 \right) - \left\{ \frac{2}{3}(-1)^3 - 2(-1)^2 + 3(-1) \right\} \\ &= 9 \end{aligned}$$

となる。

II

(1)

1個のさいころを投げたとき、目の出方は6通りあり、これらは同様に確からしく起こる。また、さいころの目の中で3の倍数であるのは3と6の2つである。したがって、さいころを2回投げるとき、3の倍数の目が奇数回出る、つまり、1回出る確率 P_2 は

$$\begin{aligned} P_2 &= {}_2C_1 \left(\frac{2}{6} \right)^1 \left(\frac{4}{6} \right)^1 \\ &= \frac{4}{9} \end{aligned}$$

である。さらに、さいころを3回投げるとき、3の倍数の目が奇数回出る、つまり、1回または3回出る確率 P_3 は

$$\begin{aligned} P_3 &= {}_3C_1 \left(\frac{2}{6} \right)^1 \left(\frac{4}{6} \right)^2 + \left(\frac{2}{6} \right)^3 \\ &= \frac{13}{27} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad P_2 = \frac{4}{9}, P_3 = \frac{13}{27}$$

(2)

さいころを $n+1$ 回投げるとき、3の倍数の目が奇数回出るのは

[1] n 回投げた時点で3の倍数の目が奇数回出て、次に3の倍数以外の目が出る

[2] n 回投げた時点で3の倍数の目が偶数回出て、次に3の倍数の目が出る

という場合があり、[1], [2]の場合は互いに排反である。よって、さいころを $n+1$ 回投げるとき、3の倍数の目が奇数回出る確率 P_{n+1} は、[1], [2]の確率の和となり

$$\begin{aligned} P_{n+1} &= \frac{4}{6} \cdot P_n + \frac{2}{6} \cdot (1 - P_n) \\ &= \frac{1}{3} P_n + \frac{1}{3} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad P_{n+1} = \frac{1}{3} P_n + \frac{1}{3}$$

(3)

(2)の結果より

$$\begin{aligned} P_{n+1} &= \frac{1}{3} P_n + \frac{1}{3} \\ \Leftrightarrow P_{n+1} - \frac{1}{2} &= \frac{1}{3} \left(P_n - \frac{1}{2} \right) \\ \Leftrightarrow P_n - \frac{1}{2} &= \left(\frac{1}{3} \right)^{n-1} \left(P_1 - \frac{1}{2} \right) \\ \Leftrightarrow P_n &= \left(\frac{1}{3} \right)^{n-1} \left(P_1 - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

となる。ここで、さいころを1回投げるとき、3の倍数の目が奇数回出る、つまり、1回出る確率 P_1 は

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{2}{6} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned} P_n &= \left(\frac{1}{3} \right)^{n-1} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} \\ &= -\frac{1}{6} \left(\frac{1}{3} \right)^{n-1} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{3} \right)^n \right\} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad P_n = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{3} \right)^n \right\}$$

Ⅲ

(1)

$$x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3)$$

より

$$x \leq -1, 3 \leq x \text{ のとき } x^2 - 2x - 3 \geq 0$$

$$-1 < x < 3 \text{ のとき } x^2 - 2x - 3 < 0$$

となる。

[1] $x \leq -1, 3 \leq x$ のとき

$$\begin{aligned} f(x) &= |x^2 - 2x - 3| - x \\ &= (x^2 - 2x - 3) - x \\ &= x^2 - 3x - 3 \end{aligned}$$

である。この $y = f(x)$ のグラフと x 軸の共有点の x 座標は

$$x^2 - 3x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{21}}{2}$$

となるが、 $4 < \sqrt{21} < 5$ であるから $x \leq -1, 3 \leq x$ を満たすのは

$$x = \frac{3 + \sqrt{21}}{2}$$

である。

[2] $-1 < x < 3$ のとき

$$\begin{aligned} f(x) &= |x^2 - 2x - 3| - x \\ &= -(x^2 - 2x - 3) - x \\ &= -x^2 + x + 3 \end{aligned}$$

である。この $y = f(x)$ のグラフと x 軸の共有点の x 座標は

$$-x^2 + x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

となるが、 $3 < \sqrt{13} < 4$ であるから $-1 < x < 3$ を満たすのは

$$x = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}$$

である。

以上[1], [2]より、 $y = f(x)$ のグラフと x 軸との共有点の x 座標は $x = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}, \frac{3 + \sqrt{21}}{2}$ である

ことがわかる。

$$(\text{答}) \quad x = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}, \frac{3 + \sqrt{21}}{2}$$

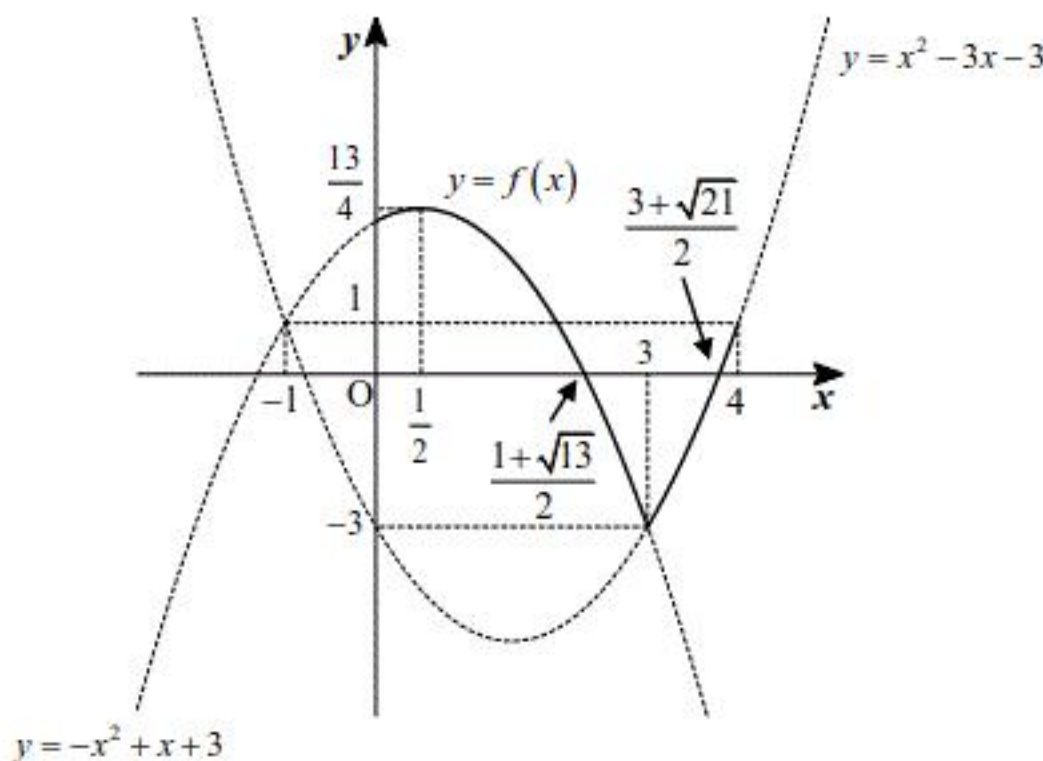
(2)

関数 $f(x) = |x^2 - 2x - 3| - x$ の式は以下のように変形できる。

$$\begin{aligned} f(x) &= \begin{cases} -x^2 + x + 3 & (-1 < x < 3) \\ x^2 - 3x - 3 & (x \leq -1, 3 \leq x) \end{cases} \\ &= \begin{cases} -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{13}{4} & (-1 < x < 3) \\ \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{21}{4} & (x \leq -1, 3 \leq x) \end{cases} \end{aligned}$$

よって、(1)の結果と合わせて、 $y = f(x)$ ($0 \leq x \leq 4$) のグラフは以下の図の実線部のような

る。



したがって、関数 $f(x)$ の $0 \leq x \leq 4$ における最大値および最小値は

$$x = \frac{1}{2} \text{ のとき最大値 } \frac{13}{4}$$

$$x = 3 \text{ のとき最小値 } -3$$

であることがわかる。

$$(\text{答}) \quad \text{最大値 } \frac{13}{4} \left(x = \frac{1}{2} \right), \text{ 最小値 } -3 \left(x = 3 \right)$$