

1

【解答】

(1)	$\frac{10+3\sqrt{3}}{2}$	(4)	$x=4$
(2)	初項： -3 公比： 4	(5)	3
(3)	59 番目	(6)	$\frac{5}{2}$

【解説】

(1)

x^2 を計算すると、

$$\begin{aligned}x^2 &= \frac{(1-\sqrt{3})^2}{2^2} \\&= \frac{1+3-2\sqrt{3}}{4} \\&= \frac{4-2\sqrt{3}}{4} \\&= \frac{2-\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

となる。したがって $x^2 + \frac{1}{x^2}$ を計算すると、

$$\begin{aligned}x^2 + \frac{1}{x^2} &= \frac{2-\sqrt{3}}{2} + \frac{2}{2-\sqrt{3}} \\&= \frac{2-\sqrt{3}}{2} + \frac{2(2+\sqrt{3})}{4-3} \\&= \frac{2-\sqrt{3}}{2} + 4+2\sqrt{3} \\&= \frac{2-\sqrt{3}+8+4\sqrt{3}}{2} \\&= \frac{10+3\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

と求まる。

(2)

実数 a, r について与えられた数列の初項を a 、公比を r とおく。 $r=1$ のとき、全ての項は a であるから、

$$\begin{aligned}3a &= -63 \quad \text{かつ} \quad 6a = -4095 \\ \Leftrightarrow a &= -21 \quad \text{かつ} \quad a = -\frac{1365}{2}\end{aligned}$$

となる。これを満たす a は存在しないため、 $r \neq 1$ である。よって、等比数列の和の公式を用いることで

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^3 ar^{k-1} &= -63 \\ \Leftrightarrow a \cdot \frac{r^3-1}{r-1} &= -63 \quad \cdots \textcircled{1} \\ \sum_{k=1}^6 ar^{k-1} &= -4095 \\ \Leftrightarrow a \cdot \frac{r^6-1}{r-1} &= -4095 \quad \cdots \textcircled{2}\end{aligned}$$

が成り立つことがわかる。したがって、①、②より

$$\begin{aligned}\frac{r^6-1}{r^3-1} &= 65 \\ \Leftrightarrow r^6-1 &= 65r^3-65 \\ \Leftrightarrow r^6-65r^3+64 &= 0 \\ \Leftrightarrow (r^3-1)(r^3-64) &= 0 \\ \Leftrightarrow (r-1)\left\{\left(r+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right\}(r-4)\{(r+2)^2+12\} &= 0\end{aligned}$$

となり、ここで、 $r \neq 1$ 、 $\left\{\left(r+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right\} > 0$ 、 $\{(r+2)^2+12\} > 0$ であるから、公比の値は

$$r=4$$

と求まる。これを①に代入すると、初項の値は

$$\begin{aligned}a \cdot \frac{64-1}{4-1} &= -63 \\ \Leftrightarrow a &= -\frac{63 \cdot 3}{63} \\ &= -3\end{aligned}$$

と求まる。

(3)

一番上の位が1, 2である数はそれぞれ

$$4! = 24$$

個ずつ存在する。一番上の位が3、その下の位が0である数字は、

$$3! = 6$$

個存在する。したがって、一番上の位が3、その下の位が1である数字の中で一番小さい数字31024は、小さい方から数えて

$$24+24+6+1=55$$

番目である。一番上の位が3、その下の位が1である数字を小さい方から挙げると、

$$31024, 31042, 31204, 31240, 31402$$

となるため、31402は小さい方から数えて59番目である。

(4)

真数条件より

$$x > 0 \quad \text{かつ} \quad x+4 > 0 \Leftrightarrow x > 0$$

である。この真数条件のもとで、与えられた方程式を変形すると

$$\begin{aligned}2\log_2 x &= \log_2(x+4)+1 \\ \Leftrightarrow \log_2 x^2 &= \log_2(x+4)+\log_2 2 \\ \Leftrightarrow \log_2 x^2 &= \log_2\{2(x+4)\}\end{aligned}$$

となるため、与えられた方程式の解は

$$\begin{aligned}x^2 &= 2(x+4) \\ \Leftrightarrow x^2-2x-8 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-4)(x+2) &= 0 \\ \therefore x &= 4 \quad (x > 0)\end{aligned}$$

と求まる。

(5)

Aの座標を (t, t^3) (t は実数)とおく。 $y=x^3$ の両辺を x について微分すると、

$$y' = 3x^2$$

となり、Aにおける接線の傾きは $3t^2$ である。直線 $y=3x+a$ の傾きは3であるため、

$$\begin{aligned}3t^2 &= 3 \\ \Leftrightarrow t^2 &= 1 \\ \therefore t &= \pm 1\end{aligned}$$

と求まる。 $t=1$ のときAにおける接線の方程式は、

$$\begin{aligned}y &= 3(x-1)+1 \\ &= 3x-2\end{aligned}$$

であり、 $t=-1$ のときAにおける接線の方程式は、

$$\begin{aligned}y &= 3(x+1)-1 \\ &= 3x+2\end{aligned}$$

である。 $a > 0$ であるから、Aの座標は $(-1, -1)$ となる。Aにおける接線 $y=3x+2$ と曲線

$y=x^3$ の交点の x 座標を計算すると、

$$\begin{aligned}x^3 &= 3x+2 \\ \Leftrightarrow x^3-3x-2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x+1)(x^2-x-2) &= 0 \\ \Leftrightarrow (x+1)^2(x-2) &= 0 \\ \therefore x &= -1, 2\end{aligned}$$

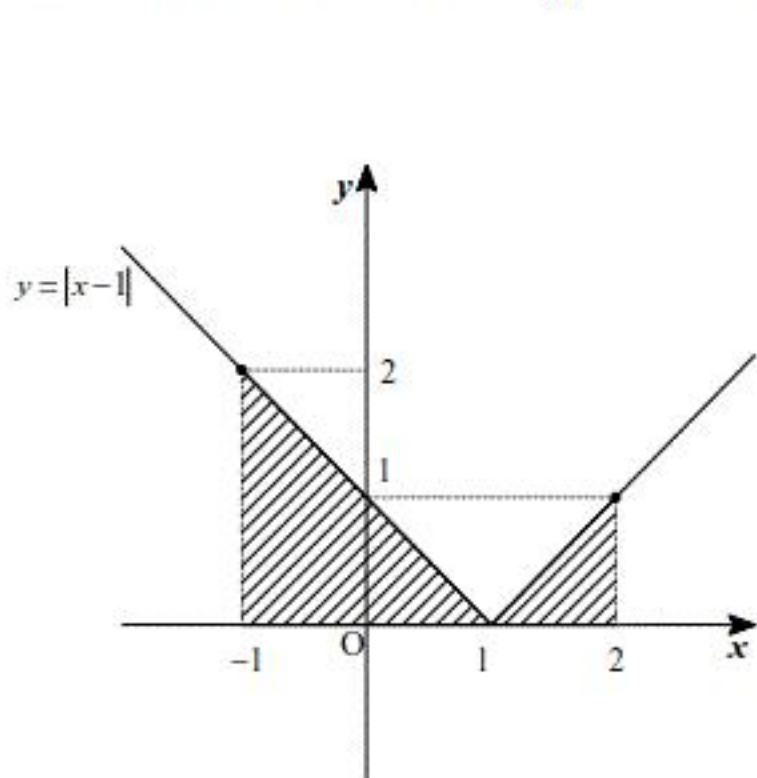
となるため、Bの座標は $(2, 8)$ である。以上より、 $\triangle OAB$ の面積は、

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{OA}|^2|\overrightarrow{OB}|^2-(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})^2} &= \frac{1}{2}\sqrt{(1+1)(4+64)-(-1\cdot 2-1\cdot 8)^2} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{2\cdot 68-100} \\ &= \frac{\sqrt{36}}{2} \\ &= 3\end{aligned}$$

と求まる。

(6)

$y=|x-1|$ のグラフは以下の図のようになり、定積分 $\int_{-1}^2|x-1|dx$ の値は以下の図の斜線部の面積に等しい。



したがって、

$$\begin{aligned}\int_{-1}^2|x-1|dx &= \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2 + \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1 \\ &= \frac{5}{2}\end{aligned}$$

となる。

II

(1)

改定前の運賃を x 円とする。端数を切り捨て、切り上げる前の運賃は $\frac{108}{105}x$ となる。切符を利用する場合 20 円の値上げとなる条件は、

$$x+10 < \frac{108}{105}x \leq x+20$$

$$\Leftrightarrow 10 < \frac{1}{35}x \leq 20$$

$$\Leftrightarrow 350 < x \leq 700$$

である。以上より、求める運賃の範囲は、360 円以上 700 円以下である。

(答) 360 円以上 700 円以下

(2)

改定前の運賃に $\frac{108}{105}$ を乗じた価格と比較して、改定後の運賃については以下のようになる。

IC カードを利用する場合：1 円以上安くなることはない

切符を利用する場合：10 円以上高くなることはない

よって、IC カード利用と切符利用で運賃の差が 11 円以上となることはない。したがって、運賃の差が最大となるのは、それが 10 円の場合であり、これは $\frac{108}{105}x$ の一の位が 0 であり、それより下の位の数のいずれかが 0 ではないときに実現される。この条件は、

$$\begin{aligned}\frac{108}{105}x - x &= \frac{3}{105}x \\ &= \frac{x}{35}\end{aligned}$$

の一の位が 0 であり、それより下の位の数のいずれかが 0 ではないときと一致する。 $\frac{x}{35}$ が 10

の倍数となるような x は、

$$x = 350, 700$$

の 2 通りである。これらの値より大きく、 $\frac{x}{35}$ の一の位が 1 となる x より小さい値が、求める運

賃の範囲である。 $x = 350$ のとき、

$$\frac{350}{35} = 10$$

であり、

$$\frac{360}{35} = 10.28\dots$$

$$\frac{370}{35} = 10.57\dots$$

$$\frac{380}{35} = 10.85\dots$$

$$\frac{390}{35} = 11.14\dots$$

となる。また、 $x = 700$ のとき、

$$\frac{700}{35} = 20$$

であり、

$$\frac{710}{35} = 20.28\dots$$

$$\frac{720}{35} = 20.57\dots$$

$$\frac{730}{35} = 20.85\dots$$

$$\frac{740}{35} = 21.14\dots$$

となる。以上より、求める運賃は、

$$360, 370, 380, 710, 720, 730$$

円である。

(答) 360, 370, 380, 710, 720, 730 円

(3)

10 円未満の端数を四捨五入する場合、値上げにならない x の範囲は、

$$\frac{108}{105}x < x + 5$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{35}x < 5$$

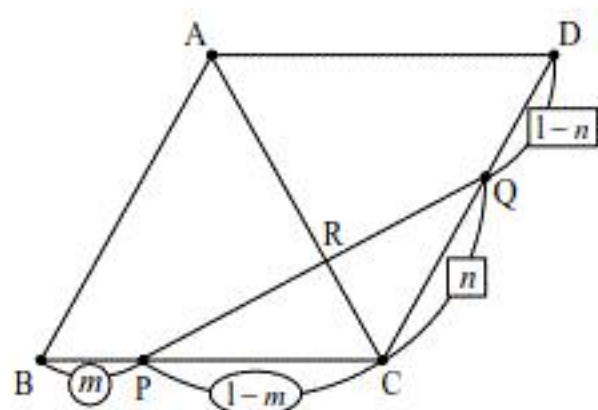
$$\Leftrightarrow x < 175$$

となる。したがって、130 円から 10 円刻みで設定されていたことと合わせて、求める範囲は 130 円以上 170 円以下である。

(答) 130 円以上 170 円以下

III

(1)



点 P は辺 BC を $m:(1-m)$ に内分する点であるから、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AP} &= \overrightarrow{AB} + m\overrightarrow{BC} \\ &= \overrightarrow{AB} + m\overrightarrow{AD} \quad (\because BC \text{ と } AD \text{ は平行で長さが等しい}) \\ &= \vec{a} + m\vec{b}\end{aligned}$$

と求まる。同様に、点 Q は辺 CD を $n:(1-n)$ に内分する点であるから、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AQ} &= \overrightarrow{AD} + (1-n)\overrightarrow{DC} \\ &= \overrightarrow{AD} + (1-n)\overrightarrow{AB} \\ &= (1-n)\vec{a} + \vec{b}\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{AP} = \vec{a} + m\vec{b}, \quad \overrightarrow{AQ} = (1-n)\vec{a} + \vec{b}$$

(2)

$\overrightarrow{PQ}$ を計算すると、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ} &= \overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{AP} \\ &= (1-n)\vec{a} + \vec{b} - \vec{a} - m\vec{b} \\ &= -n\vec{a} + (1-m)\vec{b}\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{PQ} = -n\vec{a} + (1-m)\vec{b}$$

(3)

点 R は対角線 AC 上にあるため、ある実数 k を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AR} &= k\overrightarrow{AC} \\ &= k(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) \\ &= k\vec{a} + k\vec{b}\end{aligned}$$

とかける。また、点 R は線分 PQ 上にあるため、ある実数 t を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AR} &= \overrightarrow{AP} + t\overrightarrow{PQ} \\ &= \vec{a} + m\vec{b} + t\{-n\vec{a} + (1-m)\vec{b}\} \\ &= (1-nt)\vec{a} + \{t(1-m) + m\}\vec{b}\end{aligned}$$

とかける。 $\vec{a}, \vec{b}$ は一次独立であるから係数を比較すると、

$$\begin{cases} k = 1 - nt \\ k = t(1-m) + m \end{cases}$$

が成り立ち、 k を消去すると、

$$\begin{aligned}1 - nt &= t(1-m) + m \\ \Leftrightarrow (1+n-m)t &= 1-m \\ \Leftrightarrow t &= \frac{1-m}{1+n-m}\end{aligned}$$

となり、

$$\begin{aligned}k &= 1 - n \cdot \frac{1-m}{1+n-m} \\ &= \frac{1+n-m-n+n-m}{1+n-m} \\ &= \frac{1-m+nm}{1+n-m}\end{aligned}$$

と求まる。以上より、

$$\overrightarrow{AR} = \frac{1-m+nm}{1+n-m}\vec{a} + \frac{1-m+nm}{1+n-m}\vec{b}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{AR} = \frac{1-m+nm}{1+n-m}\vec{a} + \frac{1-m+nm}{1+n-m}\vec{b}$$