

I

(i)

p と q を r で割ったときの余りが等しいとき、

$$p \equiv q \pmod{r}$$

と書くこととする。以下 $\text{mod } 5$ とすると、

$$\begin{aligned} 3^1 &= 3 \equiv 3 \\ 3^2 &= 3 \cdot 3 \equiv 4 \\ 3^3 &= 3 \cdot 3^2 \equiv 3 \cdot 4 \equiv 2 \\ 3^4 &= 3 \cdot 3^3 \equiv 3 \cdot 2 \equiv 1 \end{aligned}$$

より、

$$3^{n+4} = 3^n \cdot 3^4 \equiv 3^n$$

となるので、 $\{a_n\}$ は周期 4 の数列である。したがって、 k を自然数とすると、

$$a_{4k-3} = 3, a_{4k-2} = 4, a_{4k-1} = 2, a_{4k} = 1$$

となる。したがって、

$$a_{10} = a_{12-2} = 4$$

である。

(答) $a_{10} = 4$

(ii)

以下 $\text{mod } 7$ とする。

$$\begin{aligned} 3^1 &= 3 \equiv 3 \\ 3^2 &= 3 \cdot 3 \equiv 2 \\ 3^3 &= 3 \cdot 3^2 \equiv 3 \cdot 2 \equiv 6 \\ 3^4 &= 3 \cdot 3^3 \equiv 3 \cdot 6 \equiv 4 \\ 3^5 &= 3 \cdot 3^4 \equiv 3 \cdot 4 \equiv 5 \\ 3^6 &= 3 \cdot 3^5 \equiv 3 \cdot 5 \equiv 1 \end{aligned}$$

より、

$$3^{n+6} = 3^n \cdot 3^6 \equiv 3^n$$

となるので、 $\{b_n\}$ は周期 6 の数列である。したがって、 k を自然数とすると、

$$\begin{aligned} b_{6k-5} &= 3, b_{6k-4} = 2, b_{6k-3} = 6, \\ b_{6k-2} &= 4, b_{6k-1} = 5, b_{6k} = 1 \end{aligned}$$

となる。以上より、

$$b_{20} = b_{24-4} = 2$$

である。

(答) $b_{20} = 2$

(iii)

$c_n = a_n + b_n$ とすると、(i), (ii) より、 $\{c_n\}$ は周期 12 の数列であり、 k を自然数とすると、

$$\begin{aligned} c_{12k-11} &= 6, c_{12k-10} = 6, c_{12k-9} = 8, c_{12k-8} = 5, c_{12k-7} = 8, c_{12k-6} = 5, \\ c_{12k-5} &= 5, c_{12k-4} = 3, c_{12k-3} = 9, c_{12k-2} = 8, c_{12k-1} = 7, c_{12k} = 2 \end{aligned}$$

である。したがって、

$$\sum_{k=1}^{12} c_k = 72$$

より、

$$\sum_{k=1}^{48} c_k = 288$$

となる。よって、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{50} c_k &= \sum_{k=1}^{48} c_k + c_{49} + c_{50} \\ &= 288 + 6 + 6 \\ &= 300 \end{aligned}$$

であるから、

$$\sum_{k=1}^m (a_k + b_k) \geq 300$$

となる最小の正の整数 m は、

$$m = 50$$

である。

(答) $m = 50$

II

(i)

関数 $f(a, b)$ について、 a を変数とみて整理すると

$$f(a, b) = a^2 - ba + b + 1$$

となる。ここで、この関数を $g(a)$ とおき、平方完成すると

$$g(a) = \left(a - \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{b^2}{4} + b + 1$$

となるから、最小値は $g\left(\frac{b}{2}\right) = -\frac{b^2}{4} + b + 1$ である。よって、“すべての a に対し $f(a, b) \geq 0$ ”と

なるための b の必要十分条件は

$$g\left(\frac{b}{2}\right) \geq 0 \Leftrightarrow -\frac{b^2}{4} + b + 1 \geq 0 \Leftrightarrow b^2 - 4b - 4 \leq 0 \Leftrightarrow 2 - 2\sqrt{2} \leq b \leq 2 + 2\sqrt{2}$$

であることがわかる。

$$(\text{答}) \quad 2 - 2\sqrt{2} \leq b \leq 2 + 2\sqrt{2}$$

(ii)

関数 $f(a, b)$ について、 b を変数とみて整理すると

$$f(a, b) = -(a-1)b + a^2 + 1$$

となる。ここで、この関数を $h(b)$ とおく。以下、与えられた条件“ $b \geq 0$ であるすべての b に対し $f(a, b) \geq 0$ ”の必要十分条件について、 a の値で場合分けをして考える。

[1] $a > 1$ のとき

このとき、例えば $b = \frac{a^2 + 2}{a-1}$ は $b \geq 0$ を満たし $h\left(\frac{a^2 + 2}{a-1}\right) = -1$ であるから、 $h(b) < 0$ となる

b が存在する。よって、 $a > 1$ のときは与えられた条件を満たさない。

[2] $a = 1$ のとき

このとき、 $h(b) = 2$ となるから、 $a = 1$ のときは与えられた条件を満たす。

[3] $a < 1$ のとき

このとき、 $-(a-1) > 0$ であるから、 $b \geq 0$ における $h(b)$ の最小値は

$$h(0) = a^2 + 1$$

である。これは $h(0) > 0$ を満たすから、 $a < 1$ のときは与えられた条件を満たす。

以上[1], [2], [3]より、求める必要十分条件は $a \leq 1$ であることがわかる。

$$(\text{答}) \quad a \leq 1$$

(iii)

(ii)と同様に考える。

[1] $a > 1$ または $a < 1$ のとき

このとき、例えば $b = \frac{a^2 + 2}{a-1}$ は $h\left(\frac{a^2 + 2}{a-1}\right) = -1$ であるから、 $h(b) < 0$ となる b が存在する。

よって、 $a > 1$ または $a < 1$ のときは与えられた条件を満たさない。

[2] $a = 1$ のとき

このとき、 $h(b) = 2$ となるから、 $a = 1$ のときは与えられた条件を満たす。

以上[1], [2]より、求める必要十分条件は $a = 1$ であることがわかる。

$$(\text{答}) \quad a = 1$$

III

(i)

曲線 C_1 を表す関数 $y = x^3$ の導関数は $y' = 3x^2$ であるから、 C_1 上の点 $A(-1, -1)$ における接線 ℓ の方程式は

$$y = 3 \cdot (-1)^2 \{x - (-1)\} - 1 \Leftrightarrow y = 3x + 2$$

である。よって、 C_1 と ℓ を表す式を連立して y を消去すると

$$\begin{aligned} x^3 &= 3x + 2 \\ \Leftrightarrow x^3 - 3x - 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x+1)^2(x-2) &= 0 \\ \therefore x &= -1, 2 \end{aligned}$$

となるから、曲線 C_1 と接線 ℓ の点 A 以外の交点 B の座標は $B(2, 8)$ と求まる。

(答) $(2, 8)$

(ii)

曲線 C_2 は点 A, B を通るので、

$$\begin{cases} -1 = a - b + c \\ 8 = 4a + 2b + c \end{cases}$$

が成り立つ。これを解くと、

$$b = -a + 3, c = -2a + 2 \quad \dots \textcircled{1}$$

と表せる。したがって、曲線 C_2 の方程式は、

$$y = ax^2 + (-a+3)x + (-2a+2)$$

となる。 $E(\alpha, \alpha^3)$ とおくと、曲線 C_1 と C_2 の交点の x 座標は、 $x = -1, \alpha, 2$ である。したがって、

$$\begin{aligned} x^3 &= ax^2 + (-a+3)x + (-2a+2) \\ \Leftrightarrow x^3 - ax^2 + (a-3)x + 2a - 2 &= 0 \end{aligned}$$

について、解と係数の関係より、

$$\begin{cases} -1 + \alpha + 2 = a \\ (-1) \cdot \alpha + \alpha \cdot 2 + 2 \cdot (-1) = a - 3 \Leftrightarrow \alpha = a - 1 \\ (-1) \cdot \alpha \cdot 2 = -2a + 2 \end{cases}$$

と求まる。点 E の条件より、

$$-1 < \alpha < 2$$

であるから、

$$\begin{aligned} -1 < \alpha < 2 \\ \Leftrightarrow -1 < a - 1 < 2 \\ \Leftrightarrow 0 < a < 3 \\ \therefore -4 < c < 2 \quad (\because \textcircled{1}) \end{aligned}$$

と求まる。したがって、点 A と点 B の間の点 E で C_1 と C_2 が交わる時、 c が満たす必要十分条件は、

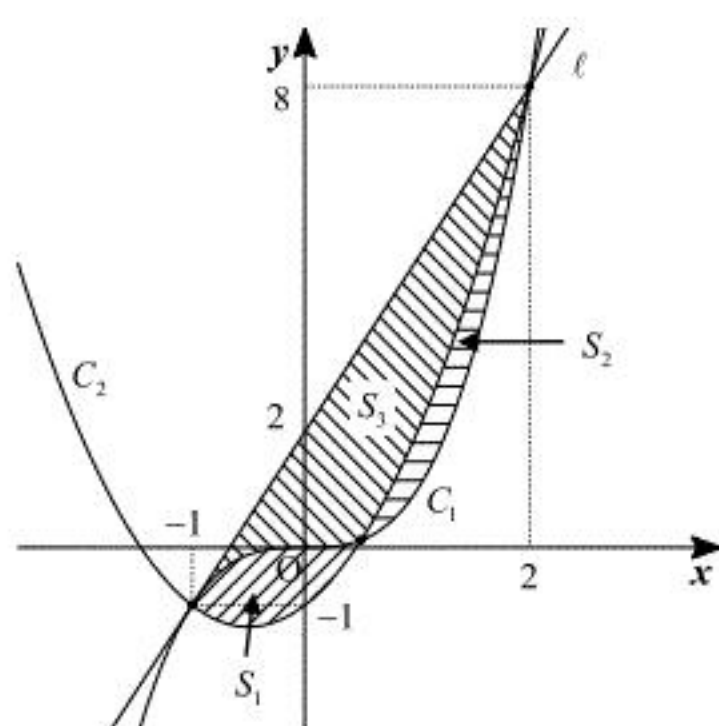
$$-4 < c < 2$$

である。

(答) $-4 < c < 2$

(iii)

(ii) より、 $0 < a < 3$ であるから、曲線 C_2 は下に凸の放物線である。したがって、 S_1 と S_2 は下図の斜線部の領域の面積である。また、下図のように、曲線 C_1 、 C_2 、接線 ℓ で囲まれた領域の面積を S_3 とする。



すると、

$$\begin{aligned} S_1 + S_3 &= \int_{-1}^2 \left[(3x+2) - \{ax^2 + (-a+3)x + (-2a+2)\} \right] dx \\ &= \int_{-1}^2 -a(x+1)(x-2) dx \\ &= \frac{a}{6} \{1 - (-2)\}^3 \\ &= \frac{9}{2}a \\ S_2 + S_3 &= \int_{-1}^2 \left\{ (3x+2) - x^3 \right\} dx \\ &= \int_{-1}^2 -(x+1)^2 \{(x+1)-3\} dx \\ &= \left[-\frac{(x+1)^4}{4} + (x+1)^3 \right]_{-1}^2 \\ &= \frac{27}{4} \end{aligned}$$

と求まるので、

$$\begin{aligned} S_1 &= S_2 \\ \Leftrightarrow S_1 + S_3 &= S_2 + S_3 \\ \Leftrightarrow \frac{9}{2}a &= \frac{27}{4} \\ \therefore a &= \frac{3}{2} \\ \therefore c &= -2 \cdot \frac{3}{2} + 2 = -1 \end{aligned}$$

と求まる。

(答) $c = -1$

IV

(i)

試行 A を 3 回繰り返して全て「外れ」を引く確率は、

$$\left(\frac{8}{10}\right)^3 = \frac{64}{125}$$

であるから、

$$P(3) = 1 - \frac{64}{125} = \frac{61}{125}$$

と求まる。また、試行 B を 1 回行うとき、2 枚とも「当たり」を引く確率は、

$$\frac{{}_2C_2}{{}_{10}C_2} = \frac{1}{45}$$

であるから、試行 B を 1 回行うとき、「当たり」の枚数が 1 枚以下となる確率は、

$$1 - \frac{1}{45} = \frac{44}{45}$$

である。したがって、

$$Q(2) = 1 - \left(\frac{44}{45}\right)^2 = \frac{89}{2025}$$

と求まる。

(答) $P(3) = \frac{61}{125}, Q(2) = \frac{89}{2025}$

(ii)

$$\begin{aligned} \log_{10} 45 &= \log_{10} \frac{3^2 \cdot 10}{2} \\ &= 2 \log_{10} 3 + \log_{10} 10 - \log_{10} 2 \\ &= 2 \cdot 0.477 + 1 - 0.301 \\ &= 1.653 \end{aligned}$$

と求まる。

(答) $\log_{10} 45 = 1.653$

(iii)

$$\begin{aligned} \log_{10} \left(\frac{4}{5}\right)^{10} &= 10 \log_{10} \frac{2^3}{10} \\ &= 10(3 \log_{10} 2 - \log_{10} 10) \\ &= 10 \cdot (-0.097) \\ &= -0.970 \\ \log_{10} \left(\frac{44}{45}\right)^{100} &= 100 \log_{10} \frac{2^2 \cdot 11}{45} \\ &= 100(2 \log_{10} 2 + \log_{10} 11 - \log_{10} 45) \\ &= 100 \cdot (-0.01) \\ &= -1.000 \end{aligned}$$

と計算できるので、

$$\begin{aligned} \log_{10} \left(\frac{4}{5}\right)^{10} &> \log_{10} \left(\frac{44}{45}\right)^{100} \\ \therefore \left(\frac{4}{5}\right)^{10} &> \left(\frac{44}{45}\right)^{100} \end{aligned}$$

が成り立つ。以上より、

$$\begin{aligned} 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^{10} &< 1 - \left(\frac{44}{45}\right)^{100} \\ \therefore P(10) &< Q(100) \end{aligned}$$

と求まる。

(答) $Q(100)$ の方が大きい