

I

(i)

$$a_{n+1} = 3a_n + 8$$

$$\Leftrightarrow a_{n+1} + 4 = 3(a_n + 4)$$

となるから、数列 $\{a_n + 4\}$ は初項 $a_1 + 4 = 5$ 、公比 3 の等比数列である。よって

$$a_n + 4 = 5 \cdot 3^{n-1}$$

$$\Leftrightarrow a_n = 5 \cdot 3^{n-1} - 4$$

である。

$$(\text{答}) \quad a_n = 5 \cdot 3^{n-1} - 4$$

(ii)

$$b_{n+1} = 3b_n + 5^n$$

$$\Leftrightarrow \frac{b_{n+1}}{5^{n+1}} = \frac{3}{5} \cdot \frac{b_n}{5^n} + \frac{1}{5}$$

$$\Leftrightarrow \frac{b_{n+1}}{5^{n+1}} - \frac{1}{2} = \frac{3}{5} \left(\frac{b_n}{5^n} - \frac{1}{2} \right)$$

となるから、数列 $\left\{ \frac{b_n}{5^n} - \frac{1}{2} \right\}$ は初項 $\frac{b_1}{5^1} - \frac{1}{2} = -\frac{3}{10}$ 、公比 $\frac{3}{5}$ の等比数列である。よって

$$\frac{b_n}{5^n} - \frac{1}{2} = -\frac{3}{10} \left(\frac{3}{5} \right)^{n-1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{b_n}{5^n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{3}{5} \right)^n$$

$$\Leftrightarrow b_n = \frac{1}{2} (5^n - 3^n)$$

である。

$$(\text{答}) \quad b_n = \frac{1}{2} (5^n - 3^n)$$

II

(i)

$f(x) = ax^3 + 2bx^2 + 6x + c$ が $x = a, 1$ で極値を持つとき、 $a \neq 1$ であるから相異なる 2 つの極値を持ち、方程式 $f'(x) = 0$ は相異なる 2 実数解 $x = a, 1$ を持つ。このとき

$$f'(x) = 3ax^2 + 4bx + 6$$

であることから

$$a \neq 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

のもとで、2 次方程式 $f'(x) = 0$ の判別式を D とすると

$$\begin{aligned} D &> 0 \\ \Leftrightarrow (2b)^2 - 3a \cdot 6 &> 0 \\ \Leftrightarrow 2b^2 &> 9a \quad \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

が成り立つ。また

$$\begin{aligned} &\begin{cases} f'(a) = 0 \\ f'(1) = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} 3a^3 + 4ab + 6 = 0 \\ 3a + 4b + 6 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} a^3 - a^2 - 2a + 2 = 0 \\ 3a + 4b + 6 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} (a-1)(a+\sqrt{2})(a-\sqrt{2}) = 0 \\ 3a + 4b + 6 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &(a, b) = \left(\pm\sqrt{2}, -\frac{3}{4}(2 \pm \sqrt{2}) \right) \text{ (複号同順) } (\because a \neq 1) \quad \dots \textcircled{3} \end{aligned}$$

が成り立つ。以上、①、②、③より、求める a, b の値は

$$(a, b) = \left(\sqrt{2}, -\frac{3}{4}(2 + \sqrt{2}) \right), \left(-\sqrt{2}, -\frac{3}{4}(2 - \sqrt{2}) \right)$$

である。

$$(\text{答}) (a, b) = \left(\sqrt{2}, -\frac{3}{4}(2 + \sqrt{2}) \right), \left(-\sqrt{2}, -\frac{3}{4}(2 - \sqrt{2}) \right)$$

(ii)

$$[1] (a, b) = \left(\sqrt{2}, -\frac{3}{4}(2 + \sqrt{2}) \right) \text{ のとき}$$

$a > 0$ かつ $a > 1$ であるから $f(x)$ は $x = 1$ で極大値、 $x = a$ で極小値をとる。よって、 $f(x)$ の極小値が $3a$ であるとき

$$\begin{aligned} f(a) &= 3a \\ \Leftrightarrow a^4 + 2a^2b + 6a + c &= 3a \\ \Leftrightarrow c &= -a^4 - 2a^2b - 3a \end{aligned}$$

$$\text{となるから、} (a, b) = \left(\sqrt{2}, -\frac{3}{4}(2 + \sqrt{2}) \right) \text{ のとき}$$

$$c = 2$$

である。

$$[2] (a, b) = \left(-\sqrt{2}, -\frac{3}{4}(2 - \sqrt{2}) \right) \text{ のとき}$$

$a < 0$ かつ $a < 1$ であるから $f(x)$ は $x = 1$ で極大値、 $x = a$ で極小値をとる。よって、 $f(x)$ の極小値が $3a$ であるとき

$$\begin{aligned} f(a) &= 3a \\ \Leftrightarrow a^4 + 2a^2b + 6a + c &= 3a \\ \Leftrightarrow c &= -a^4 - 2a^2b - 3a \end{aligned}$$

$$\text{となるから、} (a, b) = \left(-\sqrt{2}, -\frac{3}{4}(2 - \sqrt{2}) \right) \text{ のとき}$$

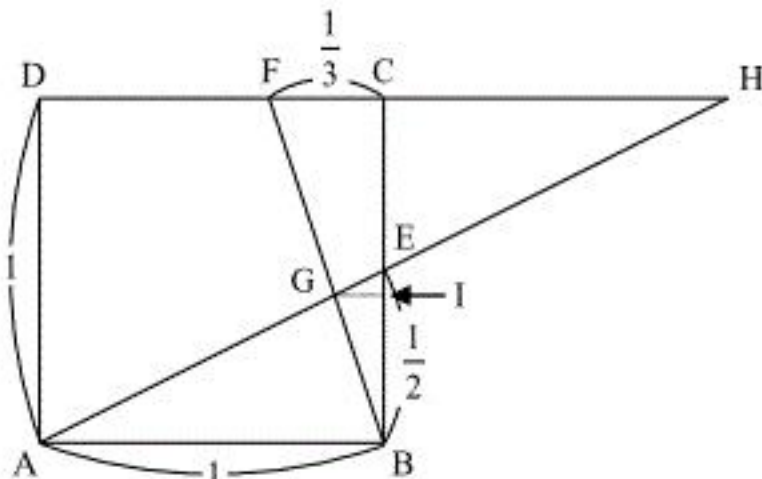
$$c = 2$$

である。

以上、[1], [2]より、求める c の値は $c = 2$ である。

$$(\text{答}) c = 2$$

III



(i)

△ABE について三平方の定理より

$$\begin{aligned} AE &= \sqrt{AB^2 + BE^2} \\ &= \sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} \\ &= \frac{\sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned} \sin \angle EAB &= \frac{EB}{AE} \\ &= \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \sin \angle EAB = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

(ii)

直線 CD と直線 AE の交点を H とおく。△ABE と△HCE について

$$BE = CE, \angle ABE = \angle HCE (= 90^\circ), \angle AEB = \angle HEC (\text{対頂角})$$

であるから、1 辺の長さとその両端の角の大きさが等しいことより △ABE ≅ △HCE である。

よって、対応する辺の長さは等しく

$$\begin{aligned} CH &= BA \\ &= 1 \end{aligned}$$

となる。さらに、△BCF と直線 GH についてメネラウスの定理より

$$\begin{aligned} \frac{BG}{GF} \times \frac{FH}{HC} \times \frac{CE}{EB} &= 1 \\ \Leftrightarrow \frac{BG}{GF} \times \frac{4}{3} \times \frac{1}{1} &= 1 \\ \Leftrightarrow \frac{BG}{GF} &= \frac{3}{4} \\ \Leftrightarrow BG &= \frac{3}{7} BF \end{aligned}$$

であり、△BCF について三平方の定理より

$$\begin{aligned} BF &= \sqrt{BC^2 + CF^2} \\ &= \sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} \\ &= \frac{\sqrt{10}}{3} \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned} BG &= \frac{3}{7} \cdot \frac{\sqrt{10}}{3} \\ &= \frac{\sqrt{10}}{7} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) BG = \frac{\sqrt{10}}{7}$$

(iii)

点 G から線分 BC に下ろした垂線の足を I とすると、△BGI と△BFC について

$$\angle BEG = \angle BCF (= 90^\circ), \angle GBI = \angle FBC (\text{共通})$$

であるから、2 つの角の大きさが等しいことより △BGI ∽ △BFC である。よって、対応する辺の長さの比は等しいから

$$\begin{aligned} GI &= \frac{BG}{BF} \cdot FC \\ &= \frac{3}{7} \cdot \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{7} \end{aligned}$$

である。以上より、求める四角形 AGFD の面積は

$$\begin{aligned} &\text{四角形 AGFD} \\ &= \text{四角形 ABCD} - \triangle ABE - \triangle BCF + \triangle BEG \\ &= AB \times BC - \frac{1}{2} \times AB \times BE - \frac{1}{2} \times BC \times CF + \frac{1}{2} \times BE \times GI \\ &= 1 \times 1 - \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{7} \\ &= \frac{13}{21} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \frac{13}{21}$$

IV

(i)

コインを4回投げたとき、動点 P が点 $A(2, 2)$ に到着するのは、表が2回、裏が2回出る場合であり、この確率は

$${}_4C_2 q^2 (1-q)^2 = 6q^2 (1-q)^2$$

と表され、これが $\frac{8}{27}$ に等しいことから

$$6q^2 (1-q)^2 = \frac{8}{27}$$

$$\Leftrightarrow q^2 (1-q)^2 = \frac{4}{81}$$

$$\Leftrightarrow q(1-q) = \frac{2}{9} \left(\because 0 < q < \frac{1}{2} \right)$$

$$\Leftrightarrow 9q^2 - 9q + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (3q-2)(3q-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow q = \frac{1}{3} \left(\because q < \frac{1}{2} \right)$$

となる。

$$(\text{答}) \quad q = \frac{1}{3}$$

(ii)

コインを8回投げたとき、動点 P が $B(4, 4)$ に到着するのは、表が4回、裏が4回出る場合であるから、その確率は

$${}_8C_4 \left(\frac{1}{3}\right)^4 \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2^5 \cdot 5 \cdot 7}{3^8}$$

である。また、動点 P が点 $A(2, 2)$ を通り点 $B(4, 4)$ に到着するのは、初めの4回において表が2回、裏が2回出て、かつ、残りの4回において表が2回、裏が2回出る場合であるから、その確率は

$${}_4C_2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot {}_4C_2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2^6}{3^6}$$

である。よって、動点 P が点 A を通らずに点 B に到着する確率は

$$\frac{35 \cdot 2^5}{3^8} - \frac{2^6}{3^6} = \frac{17 \cdot 2^5}{3^8}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{17 \cdot 2^5}{3^8}$$