

I

【解答】

ア	イ	ウ	エ	オ
g	g	a	e	e
カ	キ			
d	e			

【解説】

関数 $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ ($x>0$) について考える。まず,

$$\lim_{x\rightarrow +0}f(x)=\lim_{x\rightarrow +0}\frac{\sin x}{x}=1$$

である。ところで,

$$\begin{aligned}\int_0^xt\sin tdt&=\left[t(-\cos t)\right]_0^x-\int_0^x(-\cos t)dt\\&=-x\cos x+\left[\sin t\right]_0^x\\&=-x\cos x+\sin x\qquad\qquad\qquad\cdot\cdot\cdot\textcircled{1}\end{aligned}$$

であり, $0<x<\frac{\pi}{2}$ のとき, 区間 $0<t<x$ において関数 $g(t)=t\sin t$ は単調増加関数

($\because t, \sin t>0$ であり, $t, \sin t$ は単調増加関数)であることから, 不等式

$$g(0)<g(t)<g(x)$$

が成立するため,

$$\begin{aligned}\int_0^xg(0)dt<\int_0^xg(t)dt<\int_0^xg(x)dt\\&\Leftrightarrow 0<\int_0^xt\sin tdt<\int_0^xx\sin xdt\\&\Leftrightarrow 0<\int_0^xt\sin tdt<x^2\sin x\qquad\qquad\qquad\cdot\cdot\cdot\textcircled{2}\end{aligned}$$

が成り立つ。したがって, ①, ②より, 不等式

$$0<\frac{-x\cos x+\sin x}{x^2}<\sin x$$

が成立することがわかるから, はさみうちの原理より

$$\lim_{x\rightarrow +0}\frac{-x\cos x+\sin x}{x^2}=0\qquad\qquad\qquad\cdot\cdot\cdot\textcircled{3}$$

を得る。ここで, $f'(x)$ は

$$\begin{aligned}f'(x)&=\left(\frac{\sin x}{x}\right)'\\&=\frac{(\sin x)'\cdot x-\sin x\cdot x'}{x^2}\\&=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}\end{aligned}$$

と計算できるから, ③より

$$\lim_{x\rightarrow +0}f'(x)=\lim_{x\rightarrow +0}-\left(\frac{-x\cos x+\sin x}{x^2}\right)=0$$

がわかる。

さて, 自然数 n に対し, $a_n=\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}f(x)dx, b_n=\int_{(2n+1)\pi}^{(2n+2)\pi}f(x)dx$ とおく。このとき,

$2n\pi<x<(2n+1)\pi$ において, $\sin x>0$ であるから

$$\frac{\sin x}{(2n+1)\pi}<\frac{\sin x}{x}<\frac{\sin x}{2n\pi}$$

が成立する。したがって, $a_n=\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}\frac{\sin x}{x}dx$ は不等式

$$\begin{aligned}\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}\frac{\sin x}{(2n+1)\pi}dx<a_n<\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}\frac{\sin x}{2n\pi}dx\\&\Leftrightarrow\frac{1}{(2n+1)\pi}[-\cos x]_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}<a_n<\frac{1}{2n\pi}[-\cos x]_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}\\&\Leftrightarrow\frac{2}{(2n+1)\pi}<a_n<\frac{1}{n\pi}\end{aligned}$$

を満たす。また, b_n について, 被積分関数の x を $x+\pi$ に置き換えると, 区間が変わることに注意して

$$\begin{aligned}b_n&=\int_{(2n+1)\pi}^{(2n+2)\pi}f(x)dx\\&=\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}f(x+\pi)dx\\&=\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}\frac{\sin(x+\pi)}{x+\pi}dx\\&=\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}-\frac{\sin x}{x+\pi}dx\end{aligned}$$

となるから, a_n+b_n は

$$\begin{aligned}a_n+b_n&=\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}\left(\frac{\sin x}{x}-\frac{\sin x}{x+\pi}\right)dx\\&=\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}\frac{\pi}{x(x+\pi)}\sin xdx\end{aligned}$$

と変形できる。ここで, $2n\pi<x<(2n+1)\pi$ において不等式

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{(2n+1)\pi\cdot\{(2n+1)\pi+\pi\}}<\frac{\pi}{x(x+\pi)}<\frac{\pi}{2n\pi\cdot(2n\pi+\pi)}\\&\Leftrightarrow\frac{1}{2(n+1)(2n+1)\pi}<\frac{\pi}{x(x+\pi)}<\frac{1}{2n(2n+1)\pi}\end{aligned}$$

が成立するから, $a_n+b_n=\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}\frac{\pi}{x(x+\pi)}\sin xdx$ は不等式

$$\begin{aligned}\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}\frac{1}{2(n+1)(2n+1)\pi}\sin xdx<a_n+b_n<\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}\frac{1}{2n(2n+1)\pi}\sin xdx\\&\Leftrightarrow\frac{1}{2(n+1)(2n+1)\pi}[-\cos x]_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}<a_n+b_n<\frac{1}{2n(2n+1)\pi}[-\cos x]_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}\\&\Leftrightarrow\frac{2}{2(n+1)(2n+1)\pi}<a_n+b_n<\frac{2}{2n(2n+1)\pi}\\&\Leftrightarrow\frac{1}{(n+1)(2n+1)\pi}<a_n+b_n<\frac{1}{n(2n+1)\pi}\end{aligned}$$

を満たす。

【解答】

ク	ケ	コ		
c	d	e		
サ	シ	ス	セ	ソ
f	f	k	d	g
タ	チ			
f	i			

【解説】

実数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ を

$$\left(\frac{1+i}{2}\right)^n = a_n + ib_n \quad (n=1, 2, \dots)$$

によって定めるとき、 $n \geq 1$ において

$$\begin{aligned} a_{n+1} + ib_{n+1} &= \left(\frac{1+i}{2}\right)^{n+1} \\ &= \left(\frac{1+i}{2}\right) \left(\frac{1+i}{2}\right)^n \\ &= \left(\frac{1+i}{2}\right) (a_n + ib_n) \\ &= \left(\frac{1}{2}a_n - \frac{1}{2}b_n\right) + i\left(\frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}b_n\right) \end{aligned}$$

が成立するから、 $a_{n+1}, b_{n+1}, a_n, b_n$ が実数であることより、 a_{n+1}, b_{n+1} は a_n, b_n を用いて

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{a_n - b_n}{2} & \dots \textcircled{1} \\ b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} & \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

と表せる。また、 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ より a_n^2 と b_n^2 で $a_{n+1}^2 + b_{n+1}^2$ を表すと

$$a_{n+1}^2 + b_{n+1}^2 = \left(\frac{a_n - b_n}{2}\right)^2 + \left(\frac{a_n + b_n}{2}\right)^2 = \frac{a_n^2 + b_n^2}{2}$$

であり、これより $n \geq 1$ のとき

$$a_n^2 + b_n^2 = \frac{1}{2^{n-1}} (a_1^2 + b_1^2)$$

が成り立つことがわかるので、

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n^2 + b_n^2) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^{n-1}} (a_1^2 + b_1^2) \\ &= 0 \end{aligned}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n^2 &= \lim_{n \rightarrow \infty} b_n^2 = 0 \\ \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0 \end{aligned}$$

と求まる。

次に、無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ と $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ が収束するかどうかを調べる。

$$c = \frac{1+i}{2}$$

とおくと、 $a_n + ib_n = c^n$ であるから、自然数 N に対し、

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N a_n + i \sum_{n=1}^N b_n &= \sum_{n=1}^N c^n \\ &= \frac{c(1-c^N)}{1-c} \\ &= \frac{c-c^{N+1}}{1-c} \quad \dots \textcircled{3} \end{aligned}$$

である。 $\frac{c-c^{N+1}}{1-c}$ を a_N と b_N で表すと、

$$\begin{aligned} \frac{c-c^{N+1}}{1-c} &= \frac{c(1-c^N)}{1-c} \\ &= \frac{c\{1-(a_N + ib_N)\}}{1-c} \\ &= \frac{1+i}{1-i} \{(1-a_N) - ib_N\} \\ &= b_N + i(1-a_N) \quad \dots \textcircled{4} \end{aligned}$$

であるから、 $\textcircled{3}, \textcircled{4}$ より

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N a_n + i \sum_{n=1}^N b_n &= b_N + i(1-a_N) \\ \therefore \sum_{n=1}^N a_n &= b_N, \sum_{n=1}^N b_n = 1-a_N \quad (\because a_n, b_n \text{ は実数}) \end{aligned}$$

となる。したがって、

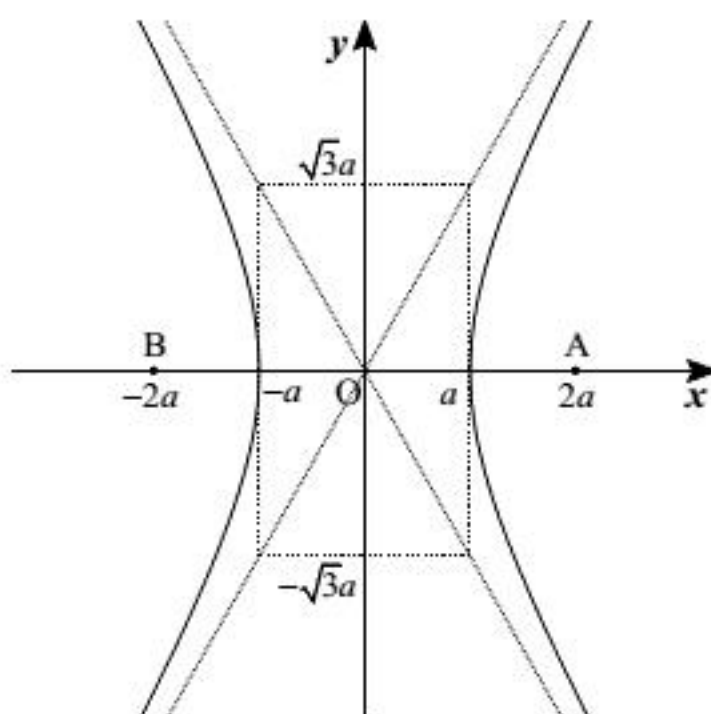
$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_n &= \lim_{N \rightarrow \infty} b_N = 0 \\ \sum_{n=1}^{\infty} b_n &= \lim_{N \rightarrow \infty} (1-a_N) = 1 \end{aligned}$$

である。

Ⅲ

(1)

与えられた双曲線 C を図示すると、以下のようになる。



動点 $P(s, t)$ は C_1 上を動くことから $s > a > 0$ であることに注意して、 t は s を用いて

$$\begin{aligned}\frac{s^2}{a^2} - \frac{t^2}{3a^2} &= 1 \\ \Leftrightarrow t^2 &= 3s^2 - 3a^2\end{aligned}$$

$$\therefore t = \sqrt{3}\sqrt{s^2 - a^2}$$

と表せる。したがって、

$$\begin{aligned}\sqrt{3}s - t &= \sqrt{3}s - \sqrt{3}\sqrt{s^2 - a^2} \\ &= \sqrt{3}\left(s - \sqrt{s^2 - a^2}\right) \\ &= \sqrt{3} \cdot \frac{s^2 - (s^2 - a^2)}{s + \sqrt{s^2 - a^2}} \\ &= \frac{\sqrt{3}a^2}{s + \sqrt{s^2 - a^2}}\end{aligned}$$

となることから

$$\begin{aligned}\lim_{s \rightarrow \infty} (\sqrt{3}s - t) &= \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3}a^2}{s + \sqrt{s^2 - a^2}} \\ &= 0 \\ \lim_{s \rightarrow \infty} s(\sqrt{3}s - t) &= \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3}sa^2}{s + \sqrt{s^2 - a^2}} \\ &= \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3}a^2}{1 + \sqrt{1 - \frac{a^2}{s^2}}} \\ &= \frac{\sqrt{3}a^2}{1 + \sqrt{1}} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}a^2\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \lim_{s \rightarrow \infty} (\sqrt{3}s - t) = 0, \quad \lim_{s \rightarrow \infty} s(\sqrt{3}s - t) = \frac{\sqrt{3}}{2}a^2$$

(2)

双曲線 C の 2 本の漸近線の方程式は

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{3a^2} &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{\sqrt{3}a}\right)\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{\sqrt{3}a}\right) &= 0 \\ \therefore y &= \pm\sqrt{3}x\end{aligned}$$

であるから、直線 ℓ は $y = \sqrt{3}x$ である。ここで、線分 PB の方程式は、点 $P(s, t)$ が C_1 上を動くことから $s + 2a > 0$ となることに注意して

$$y = \frac{t}{s + 2a}(x + 2a)$$

であるので、線分 PB と直線 ℓ の交点の x 座標について

$$\begin{aligned}\sqrt{3}x &= \frac{t}{s + 2a}x + \frac{2at}{s + 2a} \\ \Leftrightarrow \left(\sqrt{3} - \frac{t}{s + 2a}\right)x &= \frac{2at}{s + 2a} \\ \Leftrightarrow \{\sqrt{3}(s + 2a) - t\}x &= 2at \quad \cdots \textcircled{1}\end{aligned}$$

が成り立つ。ここで、(1)より

$$\begin{aligned}\sqrt{3}s - t &= \frac{\sqrt{3}}{s + \sqrt{s^2 - a^2}}a^2 \\ &> 0 \\ \therefore \sqrt{3}(s + 2a) - t &> 0\end{aligned}$$

となるので、①式の両辺を $\sqrt{3}(s + 2a) - t$ で割ることにより、点 Q の x 座標は

$$x = \frac{2at}{\sqrt{3}(s + 2a) - t}$$

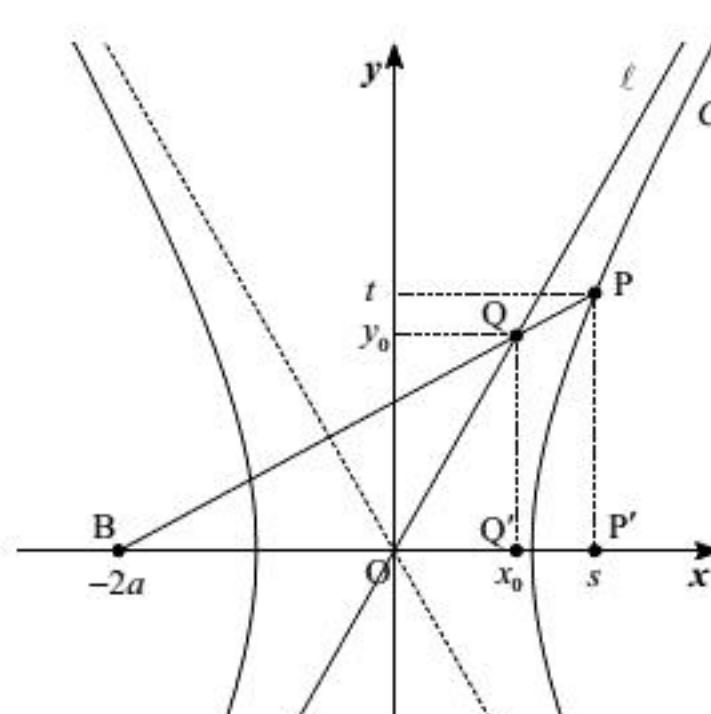
と求められる。点 Q は直線 ℓ 上の点であるから、 y 座標は

$$\begin{aligned}y &= \sqrt{3}x \\ &= \frac{2\sqrt{3}at}{\sqrt{3}(s + 2a) - t}\end{aligned}$$

と表せる。

$$(\text{答}) \quad y = \frac{2\sqrt{3}at}{\sqrt{3}(s + 2a) - t}$$

(3)



点 Q の座標を (x_0, y_0) とおく。このとき、点 P, Q から x 軸におろした垂線の足をそれぞれ P', Q' とおくと、求める比は

$$\begin{aligned}\frac{PQ}{PB} &= \frac{PB - QB}{PB} \\ &= 1 - \frac{QB}{PB} \\ &= 1 - \frac{QQ'}{PP'} \\ &= 1 - \frac{y_0}{t}\end{aligned}$$

と変形できる。(2)より $y_0 = \frac{2\sqrt{3}at}{\sqrt{3}(s + 2a) - t}$ であるから、

$$\begin{aligned}\frac{PQ}{PB} &= 1 - \frac{2\sqrt{3}a}{\sqrt{3}(s + 2a) - t} \\ &= \frac{\{\sqrt{3}(s + 2a) - t\} - 2\sqrt{3}a}{\sqrt{3}(s + 2a) - t} \\ &= \frac{\sqrt{3}s - t}{\sqrt{3}s - t + 2\sqrt{3}a}\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{\sqrt{3}s - t}{\sqrt{3}s - t + 2\sqrt{3}a}$$

(4)

(1)の結果を利用すると、

$$\begin{aligned}\lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot \frac{PQ}{PB} &= \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s(\sqrt{3}s - t)}{\sqrt{3}s - t + 2\sqrt{3}a} \\ &= \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a^2}{0 + 2\sqrt{3}a} \\ &= \frac{a}{4}\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{a}{4}$$

IV

(1)

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{-ax} + x \cdot (-a)e^{-ax} \\ &= (1 - ax)e^{-ax} \end{aligned}$$

であるから、 $a > 0$ より、曲線 $y = f(x)$ は $x = \frac{1}{a}$ で極値

$$f\left(\frac{1}{a}\right) = \frac{1}{ae}$$

をとる。また、

$$\begin{aligned} f''(x) &= -a \cdot e^{-ax} + (1 - ax) \cdot (-a)e^{-ax} \\ &= a(ax - 2)e^{-ax} \end{aligned}$$

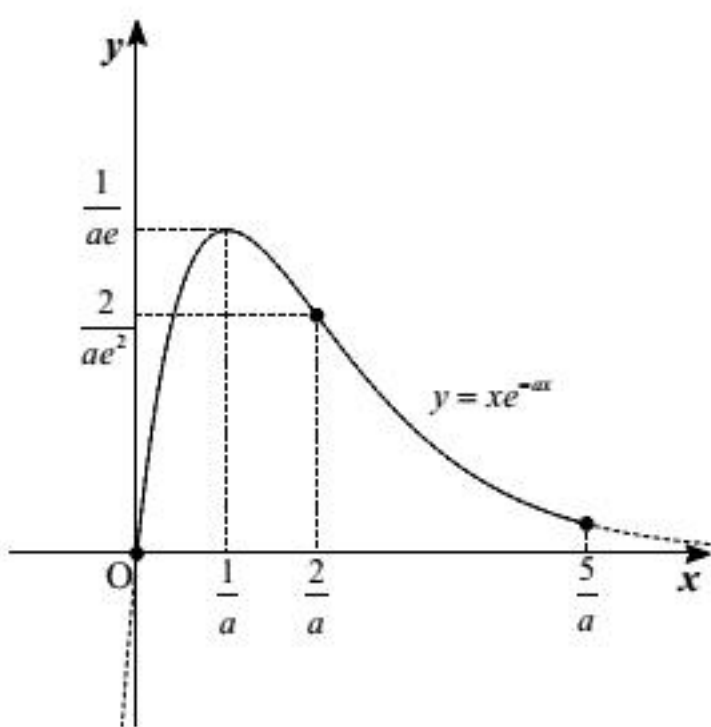
であるから、変曲点の座標は

$$\left(\frac{2}{a}, f\left(\frac{2}{a}\right)\right) = \left(\frac{2}{a}, \frac{2}{ae^2}\right)$$

である。したがって、 $f(x)$ の増減は以下の表に示す通りである。

x	0	...	$\frac{1}{a}$	...	$\frac{2}{a}$	...	$\frac{5}{a}$
$f'(x)$		+	0	-	-	-	
$f''(x)$		-	-	-	0	+	
$f(x)$	0	↗	$\frac{1}{ae}$	↘	$\frac{2}{ae^2}$	↘	$\frac{5}{ae^5}$

したがって、グラフの概形は以下の図のようになる。



(答) 極値: $x = \frac{1}{a}$ で極大値 $\frac{1}{ae}$ 、変曲点: $\left(\frac{2}{a}, \frac{2}{ae^2}\right)$ 、グラフの概形: 前図

(2)

変曲点における接線 ℓ の傾きを求めると

$$f'\left(\frac{2}{a}\right) = -\frac{1}{e^2}$$

であるから、接線 ℓ の方程式は

$$\begin{aligned} y &= -\frac{1}{e^2}\left(x - \frac{2}{a}\right) + \frac{2}{ae^2} \\ &= -\frac{1}{e^2}x + \frac{4}{ae^2} \end{aligned}$$

である。

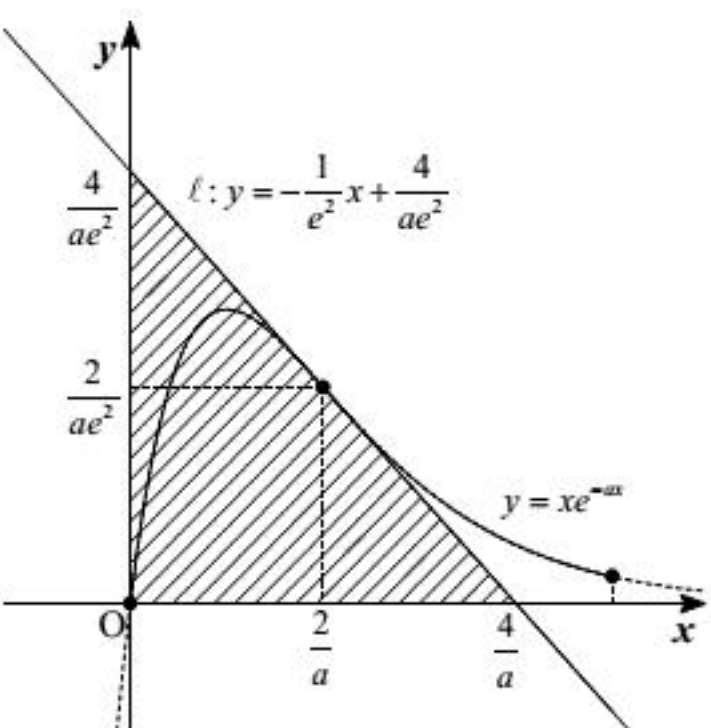
(答) $y = -\frac{1}{e^2}x + \frac{4}{ae^2}$

(3)

(1)の結果より変曲点の x 座標は $b = \frac{2}{a}$ であるから、

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\frac{2}{a}} xe^{-ax} dx \\ &= \left[-\frac{1}{a}xe^{-ax}\right]_0^{\frac{2}{a}} + \frac{1}{a} \int_0^{\frac{2}{a}} e^{-ax} dx \\ &= -\frac{2}{a^2e^2} + \frac{1}{a} \left[-\frac{1}{a}e^{-ax}\right]_0^{\frac{2}{a}} \\ &= -\frac{2}{a^2e^2} + \frac{1}{a} \left(-\frac{1}{ae^2} + \frac{1}{a}\right) \\ &= -\frac{3}{a^2e^2} + \frac{1}{a^2} \\ &= \frac{e^2 - 3}{a^2e^2} \end{aligned}$$

となる。また、(2)の結果より、領域 T を図示すると下図の斜線部の通りである。



したがって、

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{a} \cdot \frac{4}{ae^2} \\ &= \frac{8}{a^2e^2} \end{aligned}$$

となる。

(答) $S = \frac{e^2 - 3}{a^2e^2}$, $T = \frac{8}{a^2e^2}$

また、

$$\begin{aligned} 2S - T &= \frac{2(e^2 - 3)}{a^2e^2} - \frac{8}{a^2e^2} \\ &= \frac{2}{a^2e^2}(e^2 - 7) \end{aligned}$$

であるが、与えられた条件 $e = 2.71828182845\cdots$ より $e > 2.7$ であることを利用すると、

$$\begin{aligned} \frac{2}{a^2e^2}(e^2 - 7) &> \frac{2}{a^2e^2}\{(2.7)^2 - 7\} \\ &= \frac{2}{a^2e^2}(7.29 - 7) \\ &> 0 \end{aligned}$$

が成り立つので

$$\begin{aligned} 2S - T &> 0 \\ \Leftrightarrow 2S &> T \end{aligned}$$

となることが示された。

(証明終)