

I

(i)

定義より,

$$Q(4, 3) = 3^4 \cdot (3 \cdot 3 + 1) = 810$$

$$Q(-4, 3) = 3^{(-4)-1} \cdot (3 \cdot 3 + 2) = 297$$

となる。

$$(答) \quad Q(4, 3) = 810, \quad Q(-4, 3) = 297$$

(ii)

2015 を素因数分解すると, $2015 = 5 \times 13 \times 31$ であり, 素因数に 3 が含まれないから, 定義より $x = 0, -1$ のいずれかである。

[1] $x = 0$ のとき,

$$Q(x, y) = 3^0 \cdot (3y + 1) = 3y + 1$$

であるが, $2015 = 3 \cdot 671 + 2$ であり, 対応する整数 y が存在しないため, 不適である。

[2] $x = -1$ のとき,

$$Q(x, y) = 3^0 \cdot (3y + 2)$$

であり, $y = 671$ のとき, $3y + 2 = 2015$ となる。

以上[1], [2]より, $(x, y) = (-1, 671)$ のとき, $Q(x, y) = 2015$ となる。

$$(答) \quad (x, y) = (-1, 671)$$

(iii)

1377 を素因数分解すると, $1377 = 3^4 \times 17$ であり, 定義より

$$x = 4 \text{ または } -x - 1 = 4$$

$$\therefore x = 4, -5$$

である。

[3] $x = 4$ のとき,

$$Q(x, y) = 3^4 \cdot (3y + 1)$$

であるが, $17 = 3 \cdot 5 + 2$ であり, 対応する整数 y が存在しないため, 不適である。

[4] $x = -5$ のとき

$$Q(x, y) = 3^4 \cdot (3y + 2)$$

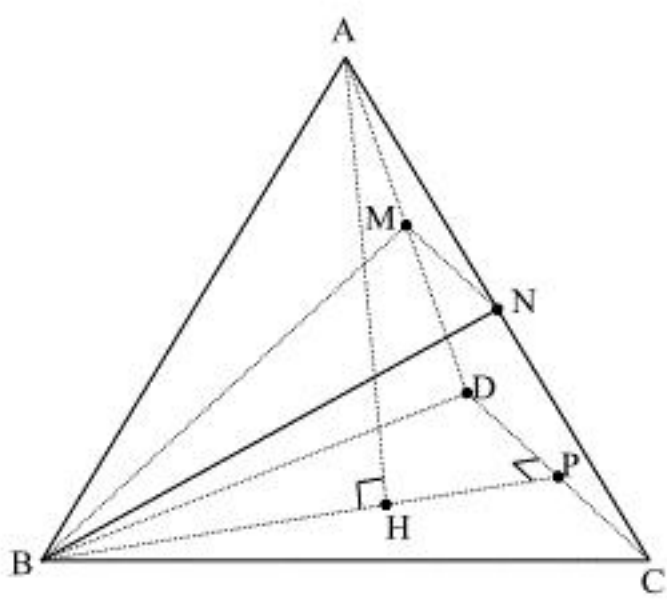
であり, $y = 5$ のとき, $3y + 2 = 17$ となる。

以上[3], [4]より, $(x, y) = (-5, 5)$ のとき, $Q(x, y) = 1377$ となる。

$$(答) \quad (x, y) = (-5, 5)$$

II

(i)



図のように、頂点Aから△BCDに下ろした垂線の足をHとし、直線BHと辺CDの交点をPとする。このとき、線分BPは辺CDの垂直二等分線である。三平方の定理より、

$$BP = \sqrt{BC^2 - CP^2} = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

であり、Hが△BCDの重心であることから、

$$BH = \frac{2}{3}BP = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

となる。したがって、

$$AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{1^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

であるから、この正四面体の体積をVとして、

$$V = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin 60^\circ\right) \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{\sqrt{2}}{12}$$

が得られる。

(答) $\frac{\sqrt{2}}{12}$

(ii)

(i)と同様にして、 $BM = BN = \frac{\sqrt{3}}{2}$ であり、中点連結定理より、

$$MN = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2}$$

である。これより、△BMNにおいて余弦定理を用いて、

$$\cos \angle MBN = \frac{BM^2 + BN^2 - MN^2}{2 \cdot BM \cdot BN} = \frac{5}{6}$$

となる。

(答) $\cos \angle MBN = \frac{5}{6}$

III

(i)

定義より、 x の 3 次方程式 $x^3 + 2x^2 + ax = 0$ の相異なる 3 つの実数解が α, β, γ となる。よって解と係数の関係より、

$$\alpha + \beta + \gamma = -2, \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = a$$

である。

$$(\text{答}) \quad \alpha + \beta + \gamma = -2, \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = a$$

(ii)

$f(x) = x^3 + 2x^2 + ax$ とおく。 $f(x) = x(x^2 + 2x + a)$ より、この曲線が x 軸と異なる 3 点で交わる

ためには、 x についての 2 次方程式 $x^2 + 2x + a = 0$ が $x = 0$ 以外の異なる 2 つの実数解を持てばよい。すなわち $g(x) = x^2 + 2x + a$ とおき、2 次方程式 $g(x) = 0$ の判別式を D とおくと

$$\frac{D}{4} > 0 \text{ かつ } g(0) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow 1 - a > 0 \text{ かつ } a \neq 0$$

$$\Leftrightarrow a < 0, 0 < a < 1$$

であるから、この条件の下で考える。このとき、 $\alpha < \beta < \gamma$ として一般性を失わない。いま、仮定より $f'(\alpha) = f'(\gamma)$ であればよいから、この条件について場合分けして考える。

[1] $\alpha = 0$ のとき

条件より、 $f'(\gamma) = f'(0)$ となる。よって

$$f'(\gamma) = f'(0)$$

$$\Leftrightarrow 3\gamma^2 + 4\gamma + a = a$$

$$\Leftrightarrow \gamma(3\gamma + 4) = 0$$

$$\therefore \gamma = -\frac{4}{3}, 0$$

となるが、いずれも $0 = \alpha < \beta < \gamma$ に反するためこれらは不適である。

[2] $\beta = 0$ のとき

条件より、 $f'(\alpha) = f'(\gamma)$ となる。よって

$$f'(\alpha) = f'(\gamma)$$

$$\Leftrightarrow 3\alpha^2 + 4\alpha + a = 3\gamma^2 + 4\gamma + a$$

$$\Leftrightarrow (\alpha - \gamma)(3\alpha + 3\gamma + 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3\alpha + 3\gamma + 4 = 0 \quad (\because \alpha \neq \gamma)$$

$$\therefore \alpha + \gamma = -\frac{4}{3}$$

となるが、(i)より $\alpha + \gamma = -2$ であるから、これは不適である。

[3] $\gamma = 0$ のとき、

条件より、 $f'(\alpha) = f'(0)$ となる。よって

$$f'(\alpha) = f'(0)$$

$$\Leftrightarrow 3\alpha^2 + 4\alpha + a = a$$

$$\Leftrightarrow \alpha(3\alpha + 4) = 0$$

$$\therefore \alpha = 0, -\frac{4}{3}$$

であり、 $\alpha < \beta < \gamma = 0$ より、 $\alpha = -\frac{4}{3}$ となる。このとき、(i)より $\beta = -2 - \alpha - \gamma = -\frac{2}{3}$ である。

これは $\alpha < \beta < \gamma$ を満たし、 $a = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{8}{9}$ が得られる。この a は $a < 0, 0 < a < 1$ を満たしている。

以上[1], [2], [3]より、求める a の値は $a = \frac{8}{9}$ である。

$$(\text{答}) \quad a = \frac{8}{9}$$

IV

(i)

1回目の操作で赤玉と白玉を1個ずつ取り出せばよいから、求める確率は、

$$\frac{{}_2C_1 \cdot {}_2C_1}{{}_4C_2} = \frac{2}{3}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{2}{3}$$

(ii)

$k \geq 2$ のとき、 $k-1$ 回目までの操作では毎回赤玉2個を取り出し、 k 回目の操作で初めて赤玉と白玉を1個ずつ取り出せばよいから、求める確率は、

$$\left(\frac{{}_2C_2}{{}_4C_2} \right)^{k-1} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{6} \right)^{k-1}$$

となる。これは $k=1$ のときも成り立つ。

$$(\text{答}) \quad \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{6} \right)^{k-1}$$

(iii)

$1 \leq k \leq n$ を満たす自然数 k に対し、 k 回目の操作の後初めて袋の中の赤玉が3個になり、その後の $n-k$ 回の操作では毎回赤玉2個を取り出す確率は、

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{6} \right)^{k-1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{{}_3C_2}{{}_4C_2} \right)^{n-k} &= \left(\frac{1}{6} \right)^{k-1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{n-k} \\ &= \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3} \right)^{k-1} \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} \end{aligned}$$

となる。よって求める確率は、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3} \right)^{k-1} \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} &= \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{3} \right)^{k-1} \\ &= \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{3} \right)^n}{1 - \frac{1}{3}} \\ &= \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{3} \right)^n \right\} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{3} \right)^n \right\}$$