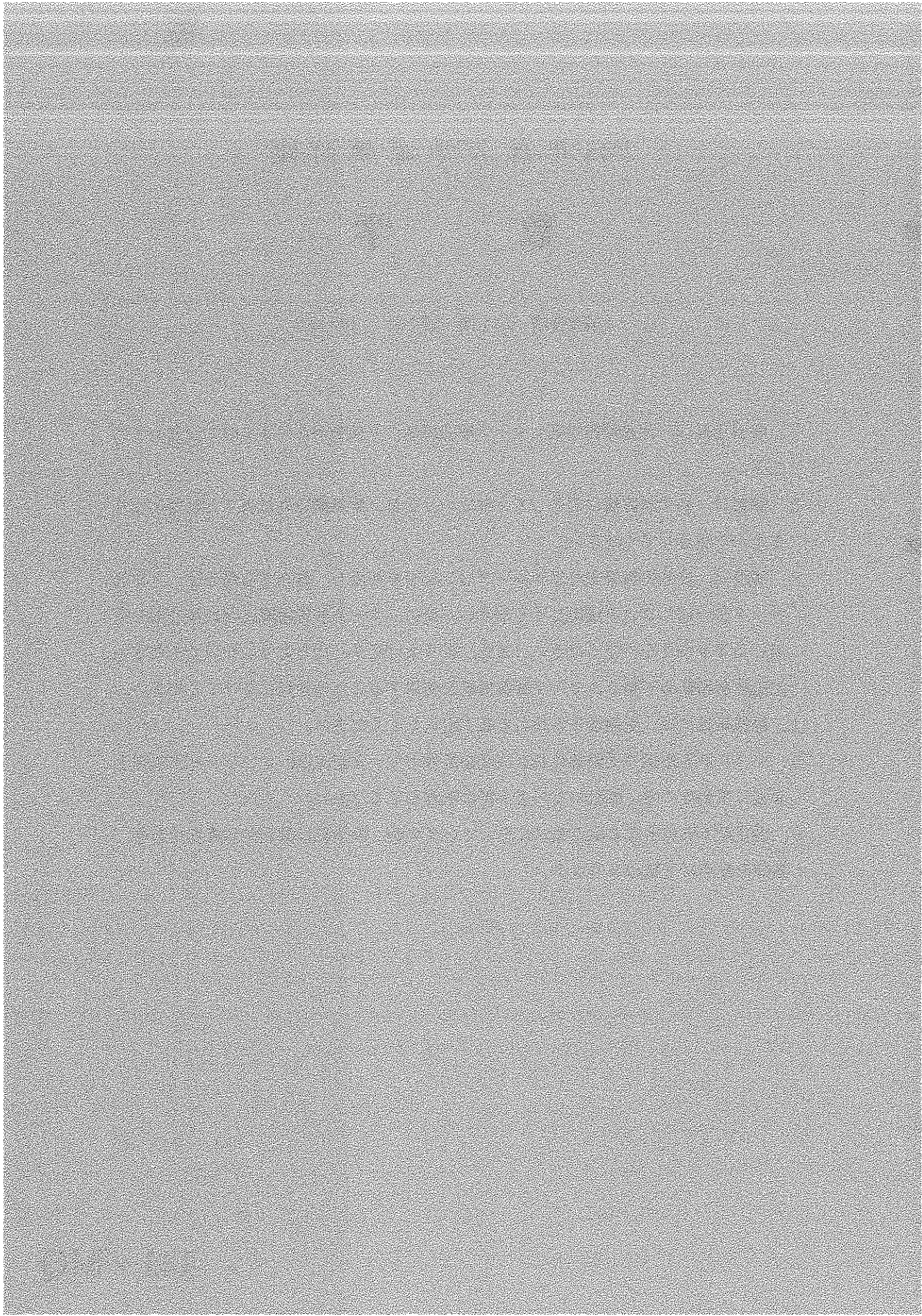


2015 年度 入学 試験 問題

数 学

(試験時間 15:20~17:00 100 分)

1. 解答用紙は、記述解答用紙とマーク解答用紙の2種類がありますので注意してください。
2. 解答は、必ず解答欄に記入してください。なお、解答欄以外に書くと無効となりますので注意してください。
3. 解答は、HBの鉛筆またはシャープペンシルを使用し、訂正する場合は、プラスチック製の消しゴムを使用してください。特に、マーク解答用紙には鉛筆のあとや消しくずを残さないでください。また、折りまげたり、汚したりしないでください。記述解答用紙の下敷きにマーク解答用紙を使用することは絶対にさけてください。
4. 解答用紙には、受験番号と氏名を必ず記入してください。
5. マーク解答用紙の受験番号および受験番号のマーク記入は、コンピュータ処理上非常に重要なので、誤記のないよう特に注意してください。
6. 満点が100点となる配点表示になっていますが、数学科は満点が200点であり、各問の配点は2倍になります。



(設問は 2 ページより始まる。)

- I 次の問題文の空欄にもっとも適する答えを解答群から選び、その記号をマーク解答用紙にマークせよ。ただし、同じ記号を2度以上用いてもよい。(20点)

関数 $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ ($x > 0$) を考える。まず、

$$\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \boxed{\text{ア}}$$

である。ところで、

$$\int_0^x t \sin t \, dt = \boxed{\text{イ}}$$

であり、 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ のとき

$$\int_0^x t \sin t \, dt \quad \boxed{\text{ウ}} \quad x^2 \sin x$$

が成り立つので、 $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\boxed{\text{イ}}}{x^2} = \boxed{\text{エ}}$ である。これにより $\lim_{x \rightarrow +0} f'(x) = \boxed{\text{オ}}$ がわかる。

さて、自然数 n に対し、 $a_n = \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} f(x) \, dx$, $b_n = \int_{(2n+1)\pi}^{(2n+2)\pi} f(x) \, dx$ とおく。

このとき、 a_n は不等式 $\boxed{\text{カ}}$ を満たす。 $a_n + b_n$ は不等式 $\boxed{\text{キ}}$ を満たす。

問題 I のア、エ、オの解答群

- (a) $-\infty$ (b) $-\pi$ (c) -1 (d) $-\frac{1}{\pi}$ (e) 0
 (f) $\frac{1}{\pi}$ (g) 1 (h) π (i) ∞

問題 I のイの解答群

- (a) $x \sin x + \cos x$ (b) $x \sin x - \cos x$ (c) $-x \sin x + \cos x$
 (d) $-x \sin x - \cos x$ (e) $x \cos x + \sin x$ (f) $x \cos x - \sin x$
 (g) $-x \cos x + \sin x$ (h) $-x \cos x - \sin x$

問題 I のウの解答群

- (a) $<$ (b) $=$ (c) $>$

問題Ⅰのカの解答群

$$\textcircled{a} \quad \frac{1}{(n+2)\pi} < a_n < \frac{2}{(2n+3)\pi}$$

$$\textcircled{b} \quad \frac{2}{(2n+3)\pi} < a_n < \frac{1}{(n+1)\pi}$$

$$\textcircled{c} \quad \frac{1}{(n+1)\pi} < a_n < \frac{2}{(2n+1)\pi}$$

$$\textcircled{d} \quad \frac{2}{(2n+1)\pi} < a_n < \frac{1}{n\pi}$$

$$\textcircled{e} \quad \frac{1}{n\pi} < a_n < \frac{2}{(2n-1)\pi}$$

問題Ⅰのキの解答群

$$\textcircled{a} \quad -\frac{1}{n(2n-1)\pi} < a_n + b_n < -\frac{1}{n(2n+1)\pi}$$

$$\textcircled{b} \quad -\frac{1}{n(2n+1)\pi} < a_n + b_n < -\frac{1}{(n+1)(2n+1)\pi}$$

$$\textcircled{c} \quad -\frac{1}{(n+1)(2n+1)\pi} < a_n + b_n < -\frac{1}{(n+1)(2n+3)\pi}$$

$$\textcircled{d} \quad \frac{1}{(n+1)(2n+3)\pi} < a_n + b_n < \frac{1}{(n+1)(2n+1)\pi}$$

$$\textcircled{e} \quad \frac{1}{(n+1)(2n+1)\pi} < a_n + b_n < \frac{1}{n(2n+1)\pi}$$

$$\textcircled{f} \quad \frac{1}{n(2n+1)\pi} < a_n + b_n < \frac{1}{n(2n-1)\pi}$$

(設問は次のページにつづく)

II 次の問題文の空欄にもっとも適する答えを解答群から選び、その記号をマーク解答用紙にマークせよ。ただし、同じ記号を2度以上用いてもよい。(20点)

i を虚数単位とする。実数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を

$$\left(\frac{1+i}{2}\right)^n = a_n + ib_n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

により定める。 a_{n+1} を a_n と b_n で表すと $a_{n+1} = \boxed{\text{ク}}$ であり、 b_{n+1} を a_n と b_n で表すと $b_{n+1} = \boxed{\text{ケ}}$ である。また、 a_n^2 と b_n^2 で $a_{n+1}^2 + b_{n+1}^2$ を表すと

$$a_{n+1}^2 + b_{n+1}^2 = \boxed{\text{コ}}$$

であり、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \boxed{\text{サ}}$ 、 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \boxed{\text{シ}}$ である。

次に、無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ と $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ が収束するかどうかを調べる。

$$c = \frac{1+i}{2}$$

とおくと、 $a_n + ib_n = c^n$ であるから、自然数 N に対し、

$$\sum_{n=1}^N a_n + i \sum_{n=1}^N b_n = \boxed{\text{ス}}$$

である。 $\boxed{\text{ス}}$ を a_N と b_N で表すと、

$$\boxed{\text{ス}} = \boxed{\text{セ}} + i \boxed{\text{ソ}}$$

であるから、

$$\sum_{n=1}^N a_n = \boxed{\text{セ}}, \quad \sum_{n=1}^N b_n = \boxed{\text{ソ}}$$

となる。したがって、

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \boxed{\text{タ}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \boxed{\text{チ}}$$

である。

問題 II のク、ケの解答群

- (a) $\frac{-a_n - b_n}{2}$ (b) $\frac{-a_n + b_n}{2}$ (c) $\frac{a_n - b_n}{2}$ (d) $\frac{a_n + b_n}{2}$
 (e) $\frac{-a_n - 2b_n}{2}$ (f) $\frac{-a_n + 2b_n}{2}$ (g) $\frac{a_n - 2b_n}{2}$ (h) $\frac{a_n + 2b_n}{2}$
 (i) $\frac{-2a_n - b_n}{2}$ (j) $\frac{-2a_n + b_n}{2}$ (k) $\frac{2a_n - b_n}{2}$ (l) $\frac{2a_n + b_n}{2}$

問題 II のコの解答群

- (a) $a_n^2 + b_n^2$ (b) $2a_n^2 + b_n^2$ (c) $a_n^2 + 2b_n^2$ (d) $2(a_n^2 + b_n^2)$
 (e) $\frac{a_n^2 + b_n^2}{2}$ (f) $\frac{2a_n^2 + b_n^2}{2}$ (g) $\frac{a_n^2 + 2b_n^2}{2}$

問題 II のサ、シ、タ、チの解答群

- (a) -2 (b) $-\frac{3}{2}$ (c) -1 (d) $-\frac{2}{3}$ (e) $-\frac{1}{2}$ (f) 0
 (g) $\frac{1}{2}$ (h) $\frac{2}{3}$ (i) 1 (j) $\frac{3}{2}$ (k) 2 (l) ∞

問題 II のスの解答群

- (a) $\frac{1 - c^{N-1}}{1 - c}$ (b) $\frac{1 + c^{N-1}}{1 - c}$ (c) $\frac{1 - c^N}{1 - c}$ (d) $\frac{1 + c^N}{1 - c}$
 (e) $\frac{1 - c^{N+1}}{1 - c}$ (f) $\frac{1 + c^{N+1}}{1 - c}$ (g) $\frac{c - c^{N-1}}{1 - c}$ (h) $\frac{c + c^{N-1}}{1 - c}$
 (i) $\frac{c - c^N}{1 - c}$ (j) $\frac{c + c^N}{1 - c}$ (k) $\frac{c - c^{N+1}}{1 - c}$ (l) $\frac{c + c^{N+1}}{1 - c}$

問題 II のセ、ソの解答群

- (a) $-a_N$ (b) $-b_N$ (c) a_N (d) b_N
 (e) $-1 + a_N$ (f) $-1 + b_N$ (g) $1 - a_N$ (h) $1 - b_N$
 (i) $-a_N - b_N$ (j) $-a_N + b_N$ (k) $a_N - b_N$ (l) $a_N + b_N$
 (m) $1 - a_N - b_N$ (n) $1 - a_N + b_N$ (o) $1 + a_N - b_N$ (p) $1 + a_N + b_N$

(設問は次のページにつづく)

III a を正の定数とし、座標平面上の 2 点 $A(2a, 0)$, $B(-2a, 0)$ を焦点とする双曲線

$$C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{3a^2} = 1$$

を考える。この双曲線の第 1 象限の部分を C_1 とし、動点 $P(s, t)$ は C_1 上を動くものとする。以下の問いに答えよ。(30 点)

- (1) 極限 $\lim_{s \rightarrow \infty} (\sqrt{3}s - t)$ および $\lim_{s \rightarrow \infty} s(\sqrt{3}s - t)$ を求めよ。

双曲線 C の 2 本の漸近線のうち、傾きが正のものを ℓ とし、線分 PB と ℓ の交点を Q とする。

- (2) 点 Q の y 座標を s, t で表せ。

- (3) 線分 PQ と PB の長さの比 $\frac{PQ}{PB}$ を s, t で表せ。

- (4) 極限 $\lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot \frac{PQ}{PB}$ を求めよ。

(設問は次のページにつづく)

IV a を正の定数とする。関数 $f(x) = xe^{-ax}$ $\left(0 \leq x \leq \frac{5}{a}\right)$ について、以下の問いに答えよ。(30 点)

(1) 関数 $y = f(x)$ の極値とグラフの変曲点を求め、グラフの概形をかけ。

(2) 曲線 $y = f(x)$ の変曲点における接線 ℓ の方程式を求めよ。

(3) (1) で求めた変曲点の x 座標を b とし、

$$S = \int_0^b f(x) dx$$

とおく。また、(2) の接線 ℓ と x 軸、 y 軸で囲まれた三角形の面積を T とおく。

このとき、 S と T を求め、

$$2S > T$$

であることを示せ。必要ならば、 $e = 2.71828182845 \dots$ を用いてよい。

(以下計算用紙)

(計算用紙)

(計算用紙)

(計算用紙)

(計算用紙)

