

I

(1)

$$\begin{aligned}\frac{5}{3}\sqrt[6]{9} + \sqrt[3]{-81} + \sqrt[3]{\frac{1}{9}} &= \frac{5}{3}\sqrt[3]{3} - 3\sqrt[3]{3} + \frac{1}{\sqrt[3]{3^2}} \\ &= \frac{5-9+1}{\sqrt[3]{3^2}} \\ &= \frac{-3}{\sqrt[3]{3^2}} \\ &= -\sqrt[3]{3}\end{aligned}$$

である。

(答) $-\sqrt[3]{3}$

(2)

2つの3人の組に区別が無いことに注意すると、

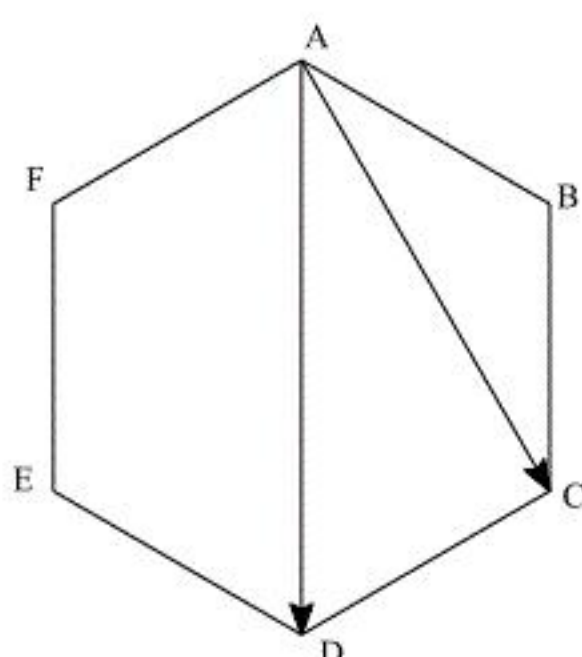
$$\begin{aligned}_{10}C_4 \cdot {}_6C_3 \cdot \frac{1}{2} &= 210 \cdot 20 \cdot \frac{1}{2} \\ &= 2100\end{aligned}$$

である。

(答) 2100通り

(3)

正六角形 ABCDEF と $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ は以下の図のようになる。



$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} &= 1 \cdot 1 \cdot \cos 60^\circ \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) \cdot 2\overrightarrow{BC} \\ &= 2 \cdot \left(\frac{1}{2} + 1 \right) \\ &= 3\end{aligned}$$

である。

(答) 3

(4)

$$\begin{aligned}\log_{0.5} x &\geq 3 \\ \Leftrightarrow 0.5^{\log_{0.5} x} &\leq 0.5^3 \\ \Leftrightarrow 0 < x &\leq \frac{1}{8}\end{aligned}$$

である。尚、 $0 < x$ は真数条件より得られる。

(答) $0 < x \leq \frac{1}{8}$

(5)

$$f'(x) = 3x^2 - 4x$$

であるから、接線の方程式は、

$$\begin{aligned}y - f(2) &= f'(2)(x - 2) \\ \Leftrightarrow y &= 4(x - 2) + (-1) \\ \Leftrightarrow y &= 4x - 9\end{aligned}$$

である。

(答) $y = 4x - 9$

(6)

$$\begin{aligned}x^2(x+3) &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= -3, 0\end{aligned}$$

である。 $-3 < x < 0$ で $x^2(x+3) > 0$ であるから、 $-3 < x < 0$ では曲線 $y = x^2(x+3)$ は x 軸の上にある。これより、問の面積 S は、

$$\begin{aligned}S &= \int_{-3}^0 x^2(x+3) dx \\ &= \left[\frac{x^4}{4} + x^3 \right]_{-3}^0 \\ &= -\frac{81}{4} + 27 \\ &= \frac{27}{4}\end{aligned}$$

である。

(答) $\frac{27}{4}$

II

(1)

判別式を D とおくと、 $D=0$ が問の条件の必要十分条件である。

$$D=0$$

$$\Leftrightarrow a^2 - 4b = 0$$

$$\Leftrightarrow (a, b) = (2, 1), (4, 4)$$

である。全事象は 36 通りであり、これらの根元事象は同様に確からしく起こる。したがって、 $D=0$ となる確率は、

$$\frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{18}$$

(2)

$D>0$ が問の条件の必要十分条件である。

$$D>0$$

$$\Leftrightarrow a^2 - 4b > 0$$

$$\Leftrightarrow (a, b) = (3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (5, n), (6, n)$$

である。ただし、 n は 1 以上 6 以下の任意の自然数を表す。よって、 $D>0$ となる確率は、

$$\frac{17}{36}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{17}{36}$$

(3)

「 $\sqrt{D}$ が有理数 $\Leftrightarrow$ 解 $\frac{a \pm \sqrt{D}}{2}$ は有理数」が成り立つ。これの対偶より、「解 $\frac{a \pm \sqrt{D}}{2}$ は無理数 $\Leftrightarrow \sqrt{D}$ が無理数」が成り立つ。したがって、 $\sqrt{D}$ が無理数であることが、問の条件の必要十分条件である。

$$\sqrt{D} \text{ が無理数}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a^2 - 4b} \text{ が無理数}$$

$$\Leftrightarrow (a, b) = (3, 1), (4, 1), (4, 2), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 5), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 6)$$

である。よって、 $\sqrt{D}$ が無理数となる確率は、

$$\frac{12}{36} = \frac{1}{3}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{3}$$

III

(1)

$$P\left(\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{6}t, \sqrt{2}\sin\frac{\pi}{6}t\right), Q\left(2\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4}t, 2\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4}t\right)$$

であるから,

$$\begin{aligned} PQ^2 &= \left(\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{6}t - 2\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4}t\right)^2 + \left(\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{6}t - 2\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4}t\right)^2 \\ &= 2\cos^2\frac{\pi}{6}t + 2\sin^2\frac{\pi}{6}t + 8\cos^2\frac{\pi}{4}t + 8\sin^2\frac{\pi}{4}t - 8\cos\frac{\pi}{6}t\cos\frac{\pi}{4}t - 8\sin\frac{\pi}{6}t\sin\frac{\pi}{4}t \\ &= 2 + 8 - 8\cos\left(\frac{\pi}{6}t - \frac{\pi}{4}t\right) \\ &= 10 - 8\cos\frac{\pi}{12}t \end{aligned}$$

である。よって、 $t=6$ のときは,

$$\begin{aligned} PQ &= \sqrt{10 - 8\cos\frac{\pi}{2}} \\ &= \sqrt{10} \end{aligned}$$

である。

(答) $\sqrt{10}$

(2)

先程の計算より,

$$PQ^2 = 10 - 8\cos\frac{\pi}{12}t$$

である。

(答) $10 - 8\cos\frac{\pi}{12}t$

(3)

$$0 \leq t \leq 8$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \frac{\pi}{12}t \leq \frac{2}{3}\pi$$

である。 $0 \leq \frac{\pi}{12}t \leq \frac{2}{3}\pi$ では $\cos\frac{\pi}{12}t$ は t の単調減少関数であるから、 t が最大値8のときに,

$\cos\frac{\pi}{12}t$ の単調減少関数であるPQは最大値を取る。その値は,

$$\begin{aligned} PQ &= \sqrt{10 - 8\cos\frac{2\pi}{3}} \\ &= \sqrt{10 - 8 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} \\ &= \sqrt{14} \end{aligned}$$

である。

(答) $t=8$ のとき最大値 $\sqrt{14}$