I

〔解答〕

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| (1) | $x=-1,\ -1\pm\sqrt{5}$ | | (4) | $x<2$ |
| (2) | $\dfrac{4}{9}$ | | (5) | $a_n=\dfrac{1}{3}\left(4^n+5\right)$ |
| (3) | $x=0,\ \dfrac{\pi}{4},\ \pi,\ \dfrac{7}{4}\pi$ | | (6) | 9 |

〔解説〕

(1)

与式を変形すると

$$x^3+3x^2-2x-4=0$$
$$\Leftrightarrow (x+1)\left(x^2+2x-4\right)=0$$

となる。また,

$$x^2+2x-4=0 \Leftrightarrow x=-1\pm\sqrt{5}$$

であるから，求める解は $x=-1,\ -1\pm\sqrt{5}$ である。

(2)

それぞれの目が出る確率は同様に確からしいとする。すべての目の出方は $6^3=216$ 通りある。また，余事象を考えると，全ての目が異なるような出方は $6\cdot5\cdot4=120$ 通りである。よって，同じ目が2個以上出る確率は

$$1-\frac{120}{216}=\frac{4}{9}$$

となる。

(3)

加法定理を用いて与式を変形すると

$$\sin 2x=\sqrt{2}\sin x$$
$$\Leftrightarrow 2\sin x\cos x=\sqrt{2}\sin x$$
$$\Leftrightarrow 2\sin x\left(\cos x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=0$$

となる。したがって $\sin x=0$ または $\cos x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ となるとき，上式は成り立つ。$0\leqq x<2\pi$ であるから，求める解は

$$x=0,\ \frac{\pi}{4},\ \pi,\ \frac{7}{4}\pi$$

である。

(4)

$10^x=t$ とおき，与式を変形すると

$$10^{2x}-3^2\cdot10^{x+1}-10^3<0$$
$$\Leftrightarrow \left(10^x\right)^2-90\cdot10^x-1000<0$$
$$\Leftrightarrow t^2-90t-1000<0$$
$$\Leftrightarrow (t-100)(t+10)<0$$
$$\Leftrightarrow -10<t<100$$

となる。よって，$-10<10^x<100$ となる。常に $10^x>0$ であるから，求める解は

$$10^x<100 \Leftrightarrow x<2$$

である。

(5)

階差数列の和の公式を用いると

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}\left(a_{k+1}-a_k\right)$$
$$=3+\sum_{k=1}^{n-1}4^k$$
$$=3+4\cdot\frac{4^{n-1}-1}{4-1}$$
$$=\frac{1}{3}\left(4^n+5\right)$$

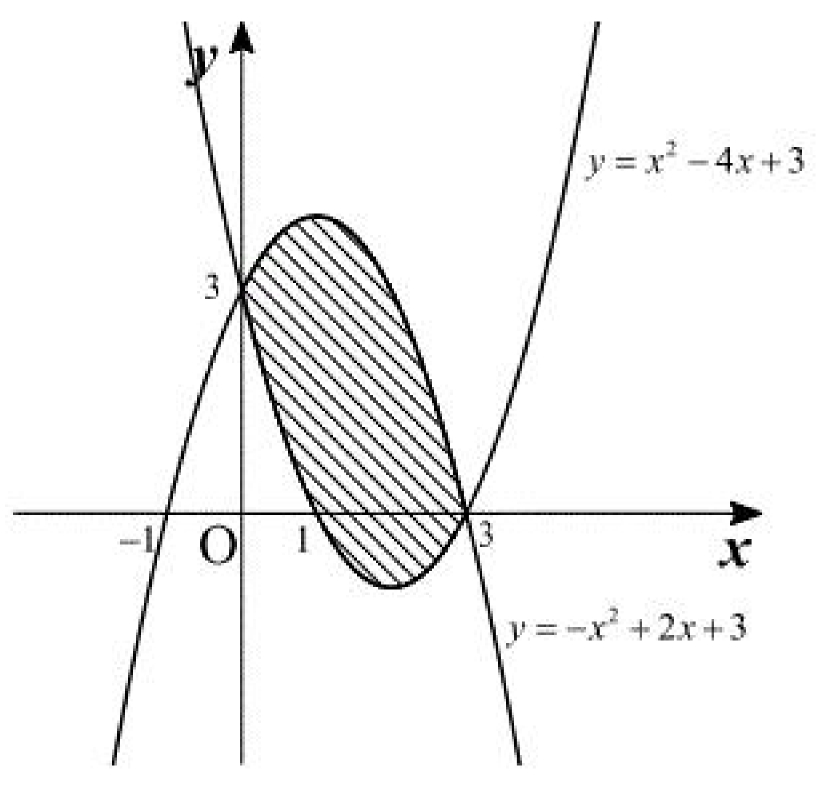
が得られる。

(6)

放物線の交点を求めると

$$-x^2+2x+3=x^2-4x+3$$
$$\Leftrightarrow x^2-3x=0$$
$$\Leftrightarrow x=0,\ 3$$

となる。よって，下のような図になっている。




求める面積は

$$\int_0^3\left\{\left(-x^2+2x+3\right)-\left(x^2-4x+3\right)\right\}dx=-2\int_0^3 x(x-3)\,dx$$
$$=-2\cdot\left\{-\frac{1}{6}\cdot(3-0)^3\right\}$$
$$=9$$

となる。

## II

(1)

$f'(x)=3x^2-12a^2=3(x+2a)(x-2a)$ である。また，問題文より $a>0$ であるから増減表は以下のようになる。

| $x$ | $\cdots$ | $-2a$ | $\cdots$ | $2a$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ |
| $f(x)$ | ↗ | 極大 | ↘ | 極小 | ↗ |

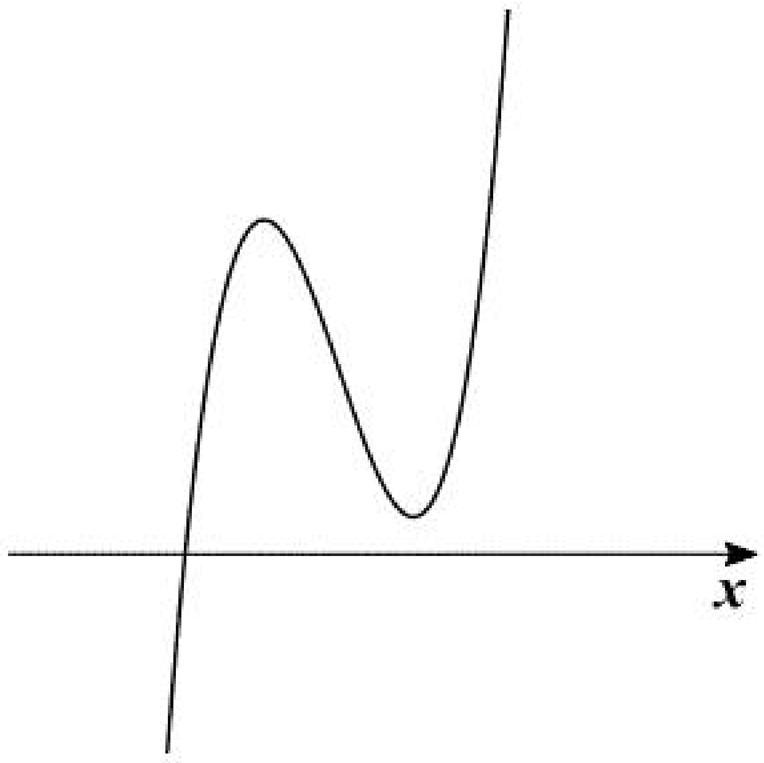
よって，$f(x)$ は $x=2a$ のとき極小値 $f(2a)=-16a^3+16a$，$x=-2a$ のとき極大値 $f(-2a)=16a^3+16a$ をとる。

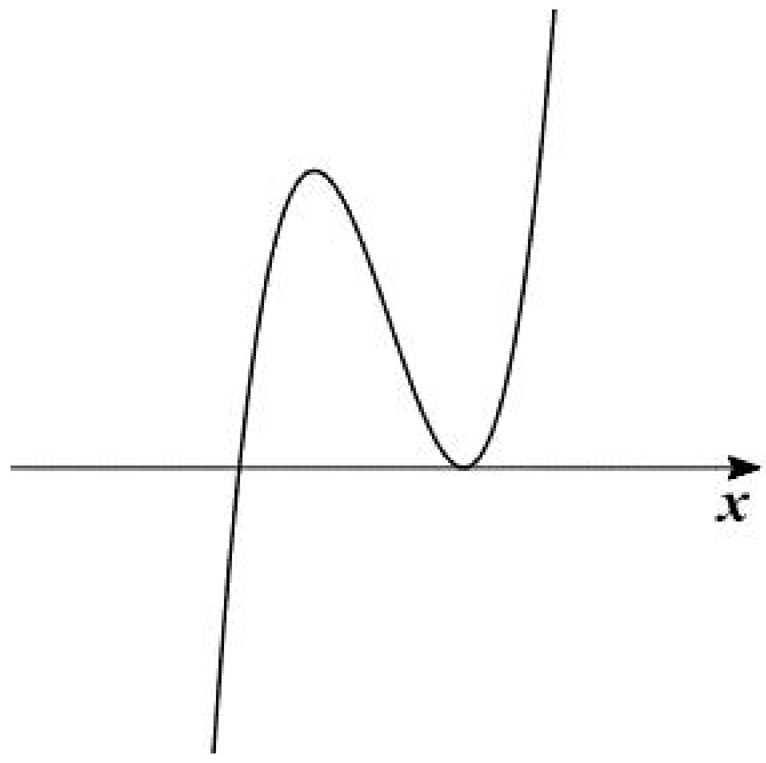
(答)　$x=2a$ のとき極小値 $-16a^3+16a$

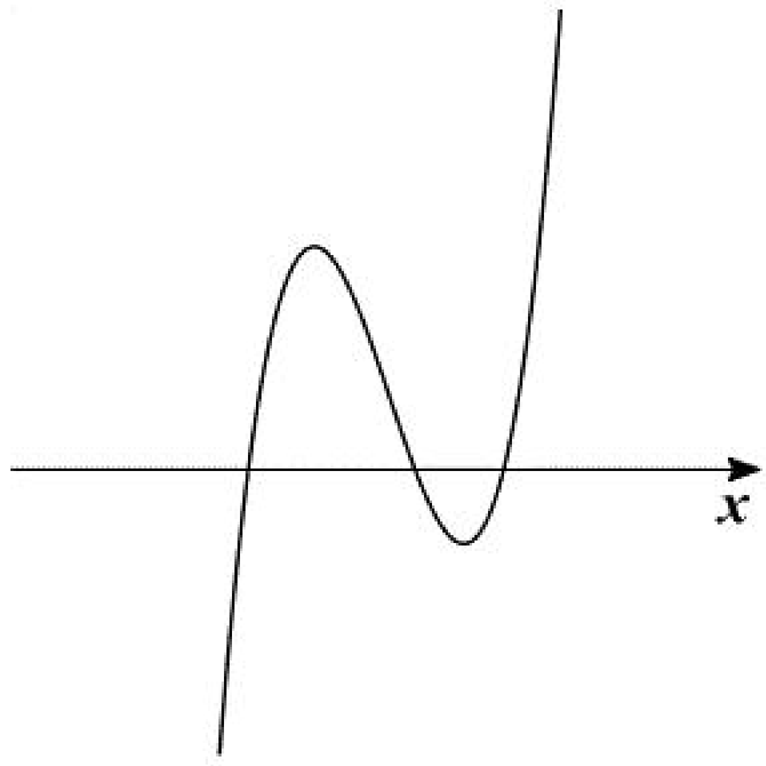
$x=-2a$ のとき極大値　$16a^3+16a$

(2)

3次方程式 $f(x)=0$ の実数解の個数は，$y=f(x)$ のグラフと $x$ 軸との交点の個数に一致する。$a>0$ より，$16a^3+16a>0$ である。よって解の個数が1, 2, 3個のとき，$y=f(x)$ のグラフはそれぞれ下のような図になっている。




極大値が正であることから，極小値の符号により，解の個数が分かり，極小値が負のときは解は3個，極小値が0のときは解は2個，極小値が正のときは解は1個である。(1)の結果より，極小値は

$$f(2a)=-16a^3+16a$$
$$=16a\cdot(1-a)\cdot(1+a)$$

である。$a$ は正であることから，$0<a<1$ のとき極値の積は正になり解の個数は1個であり，$a=1$ のとき極値の積は0になり解の個数は2個であり，$1<a$ のとき極値の積は負になり解の個数は3個である。

(答)　$0<a<1$ のとき　1個

$a=1$ のとき　2個

$1<a$ のとき　3個

## Ⅲ

(1)

0および1のカードは5枚ずつあるから，$n \leqq 5$ のとき，
左から $k\left(0 \leqq k \leqq n\right)$ 番目のカードには0か1が書かれているから

$$a_n = 2^n$$

である。

(答) $a_n = 2^n$

(2)

0と1が書かれたカードはそれぞれ5枚あるから，$n = 8$ のとき，並んだカードのうち1が書かれたカードの枚数は3, 4, 5枚のうちのいずれかである。

[1] 1が書かれたカードの枚数が3枚のとき
並べ方は

$${}_8\mathrm{C}_3 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 56 \text{（通り）}$$

である。

[2] 1が書かれたカードの枚数が4枚のとき
並べ方は

$${}_8\mathrm{C}_4 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 70 \text{（通り）}$$

である。

[3] 1が書かれたカードの枚数が5枚のとき
並べ方は

$${}_8\mathrm{C}_5 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 56 \text{（通り）}$$

である。

以上[1], [2], [3]より，$a_8 = 56 + 70 + 56 = 182$ である。

(答) $a_8 = 182$

(3)

左から $k\left(0 \leqq k \leqq 8\right)$ 番目のカードに書かれた数字を $b_k$ とすると，問題文のようにしてできる2進数を10進数で表すと

$$b_1 \cdot 2^7 + b_2 \cdot 2^6 + b_3 \cdot 2^5 + b_4 \cdot 2^4 + b_5 \cdot 2^3 + b_6 \cdot 2^2 + b_7 \cdot 2^1 + b_8 \cdot 2^0$$

となる。$b_1 = 0$ なら，これは

$$2^6 + 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0 = 127$$

以下である。よって，200以上になるとき $b_1 = 1$ である。次に，$b_2 = 0$ なら，

$$2^7 + 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0 = 191$$

以下である。よって，200以上になるとき，$b_2 = 1$ である。$b_1 = b_2 = 1$ のとき，200以上になるとすると

$$2^7 + 2^6 + b_3 \cdot 2^5 + b_4 \cdot 2^4 + b_5 \cdot 2^3 + b_6 \cdot 2^2 + b_7 \cdot 2^1 + b_8 \cdot 2^0 \geqq 200$$
$$\Leftrightarrow 32b_3 + 16b_4 + 8b_5 + 4b_6 + 2b_7 + b_8 \geqq 8$$

となる。$4 + 2 + 1 = 7$ であるから，$\left(b_3,\ b_4,\ b_5\right) = \left(0,\ 0,\ 0\right)$ のときこの不等式は成り立たない。逆に $\left(b_3,\ b_4,\ b_5\right) \neq \left(0,\ 0,\ 0\right)$ のとき，この不等式は成り立つ。以上より，$b_1 = b_2 = 1$ かつ $\left(b_3,\ b_4,\ b_5\right) \neq \left(0,\ 0,\ 0\right)$ であることが，問題文のようにしてできる2進数を10進数で表したときに200以上になるための必要十分条件である。(2)と同様に場合分けをする。

[1] 1が書かれたカードの枚数が3枚のとき
先の考察より，$b_1 = b_2 = 1$ かつ，$b_3,\ b_4,\ b_5$ のうち1つだけが1になり，$b_3,\ b_4,\ b_5$ のうちの2つと $b_6,\ b_7,\ b_8$ が0である。よってこのとき3通りである。ところで，1が書かれたカード3枚と，0が書かれたカード5枚を並び替える場合の数は ${}_8\mathrm{C}_3 = 56$（通り）である。また，0と1が書かれたカードがそれぞれ5枚ずつある中から1が書かれたカード3枚と，0が書かれたカード5枚を取り出す確率は

$$\frac{{}_5\mathrm{C}_3 \cdot {}_5\mathrm{C}_5}{{}_{10}\mathrm{C}_8} = \frac{10}{45} = \frac{2}{9}$$

である。

[2] 1が書かれたカードの枚数が4枚のとき
先の考察より，$b_1 = b_2 = 1$ かつ，$b_3,\ b_4,\ b_5$ のうち少なくとも1つが1になる。

[i] $b_3,\ b_4,\ b_5$ のうち1つだけが1になるとき
$b_6,\ b_7,\ b_8$ のうち1つだけが1になる。よってこのとき $3 \cdot 3 = 9$ 通りである。

[ii] $b_3,\ b_4,\ b_5$ のうち2つが1になるとき
$b_6,\ b_7,\ b_8$ は全て0である。よって，このとき ${}_3\mathrm{C}_2 = 3$ 通りである。

以上より，このとき $3 + 9 = 12$ 通りである。ところで，0と1が書かれたカードを4枚ずつを並び替える場合の数は ${}_8\mathrm{C}_4 = 70$（通り）である。また，0と1が書かれたカードがそれぞれ5枚ずつある中から0と1が書かれたカードを4枚ずつ取り出す確率は

$$\frac{{}_5\mathrm{C}_4 \cdot {}_5\mathrm{C}_4}{{}_{10}\mathrm{C}_8} = \frac{25}{45} = \frac{5}{9}$$

である。

[3] 1が書かれたカードの枚数が5枚のとき

[i] $b_3,\ b_4,\ b_5$ のうち1つだけが1になるとき
$b_6,\ b_7,\ b_8$ のうち2つが1になる。よってこのとき $3 \cdot {}_3\mathrm{C}_2 = 9$ 通りである。

[ii] $b_3,\ b_4,\ b_5$ のうち2つが1になるとき
$b_6,\ b_7,\ b_8$ のうち1つが1になる。よってこのとき ${}_3\mathrm{C}_2 \cdot 3 = 9$ 通りである。

[iii] $b_3,\ b_4,\ b_5$ のうち3つが1になるとき
$b_6,\ b_7,\ b_8$ は全て0である。よってこのとき ${}_3\mathrm{C}_3 \cdot 1 = 1$ 通りである。

以上より，このとき $9 + 9 + 1 = 19$ 通りである。ところで，1が書かれたカード5枚と，0が書かれたカード3枚を並び替える場合の数は ${}_8\mathrm{C}_3 = 56$（通り）である。また，0と1が書かれたカードがそれぞれ5枚ずつある中から1が書かれたカード5枚と，0が書かれたカード3枚を取り出す確率は

$$\frac{{}_5\mathrm{C}_3 \cdot {}_5\mathrm{C}_5}{{}_{10}\mathrm{C}_8} = \frac{10}{45} = \frac{2}{9}$$

である。

以上[1], [2], [3]より，問題文のようにしてできる2進数を10進数で表したときに200以上になる確率は

$$\frac{2}{9} \cdot \frac{3}{56} + \frac{5}{9} \cdot \frac{12}{70} + \frac{2}{9} \cdot \frac{19}{56} = \frac{23}{126}$$

である。

(答) $\dfrac{17}{91}$