

I

(i)

$$x^2 = (x^2 - x - 1) + x + 1$$

であるから, $a_1 = 1, b_1 = 1$ である。

(答) $a_1 = 1, b_1 = 1$

(ii)

x^{2n} を $x^2 - x - 1$ で割ったときの商を $Q_n(x)$ とすると,

$$x^{2n} = Q_n(x)(x^2 - x - 1) + a_n x + b_n$$

と表すことができる。よって,

$$\begin{aligned} x^{2(n+1)} &= Q_n(x) \cdot x^2 (x^2 - x - 1) + a_n x^3 + b_n x^2 \\ &= \{Q_n(x)x^2 + a_n x + a_n + b_n\}(x^2 - x - 1) + (2a_n + b_n)x + a_n + b_n \end{aligned}$$

となるので,

$$\begin{cases} a_{n+1} = 2a_n + b_n \\ b_{n+1} = a_n + b_n \end{cases}$$

となる。

(答) $a_{n+1} = 2a_n + b_n, b_{n+1} = a_n + b_n$

II

(i)

$$f(x)=x^3+3ax^2+3(2a-1)x-5$$

を微分すると、

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2+6ax+3(2a-1) \\ &= 3(x+1)(x+2a-1) \end{aligned}$$

となる。よって、

$$-1 \neq -2a+1 \Leftrightarrow a \neq 1$$

のときには、 $f'(x)=0$ は異なる2つの実数解を持つ2次方程式になるので、 $f(x)$ は極大値を持つ。以上から、求める条件は $a \neq 1$ である。

(答) $a \neq 1$

(ii)

-1 と $-2a+1$ の大小関係によって場合分けする。

(ア) $-1 < -2a+1$ つまり、 $a < 1$ のとき

$f(x)$ の増減表は以下ようになる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	$-2a+1$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

増減表より、極大値は

$$f(-1)=-3a-3$$

であり、これが3以上になるには、

$$-3a-3 \geq 3$$

$$\Leftrightarrow a \leq -2$$

となればよい。これは $a < 1$ を満たす。

(イ) $-1 = -2a+1$ つまり、 $a = 1$ のとき

(i)より $f(x)$ は極大値を持たない。

(ウ) $-2a+1 < -1$ つまり、 $a > 1$ のとき

$f(x)$ の増減表は以下ようになる。

x	$\cdots$	$-2a+1$	$\cdots$	-1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

増減表より、極大値は

$$f(-2a+1)=4a^3-12a^2+9a-7$$

であり、これが3以上になるには、

$$4a^3-12a^2+9a-7 \geq 3$$

$$\Leftrightarrow 4a^3-12a^2+9a-10 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (2a-5)(2a^2-a+2) \geq 0$$

となればよい。

$$2a^2-a+2=2\left(a-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{15}{8}>0$$

であるから、 $a \geq \frac{5}{2}$ となればよいと分かる。これは $a > 1$ を満たす。

以上、(ア)(イ)(ウ)から求める範囲は $a \leq -2$ 、 $a \geq \frac{5}{2}$ である。

(答) $a \leq -2$ 、 $a \geq \frac{5}{2}$

Ⅲ

(i)

四角形 ABCD は円に内接するので、

$$\angle D = \pi - \angle B$$

である。よって、

$$\sin D = \sin(\pi - B) = \sin B$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \sin D = \sin B$$

(ii)

$$S_1 = \frac{1}{2} \cdot BA \cdot BC \cdot \sin B = 6 \sin B$$

$$S_2 = \frac{1}{2} \cdot CD \cdot DA \cdot \sin D = 15 \sin B$$

となる。これより、

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{6 \sin B}{15 \sin B} = \frac{2}{5}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{S_1}{S_2} = \frac{2}{5}$$

(iii)

$\triangle ABC$ において、余弦定理を用いると、

$$\begin{aligned} AC^2 &= AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos B \\ &= 3^2 + 4^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cos B \\ &= 25 - 24 \cos B \end{aligned}$$

となる。また、 $\triangle ADC$ において、余弦定理を用いると、

$$\begin{aligned} AC^2 &= AD^2 + DC^2 - 2 \cdot AD \cdot DC \cdot \cos D \\ &= 5^2 + 6^2 - 2 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \cos D \\ &= 61 - 60 \cos D \end{aligned}$$

となる。 $\angle D = \pi - \angle B$ であるから、 $\cos D = -\cos B$ である。よって、

$$AC^2 = 61 + 60 \cos B$$

となる。以上から、

$$61 + 60 \cos B = 25 - 24 \cos B \Leftrightarrow \cos B = -\frac{3}{7}$$

となり、

$$AC = \sqrt{61 + 60 \cos B} = \sqrt{\frac{247}{7}}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad AC = \sqrt{\frac{247}{7}}$$

IV

(i)

カードの取り出し方は、 N^2 通りであり、これらはすべて同様に確からしい。 $M \leq j$ となるカードの取り出し方は、 X と Y がともに j 以下であればよいので、 j^2 通りである。よって、求める確率は

$$\frac{j^2}{N^2}$$

となる。

$$(答) \frac{j^2}{N^2}$$

(ii)

(ア) $j=1$ のとき

$M=1$ となるカードの取り出し方は、 X と Y がともに1であればよいので、1通りであるので、この確率は $\frac{1}{N^2}$ である。

(イ) $j \geq 2$ のとき

$M=j$ となる確率は、 $M \leq j$ となる確率から、 $M \leq j-1$ となる確率を除いたものであるから、

$$\frac{j^2}{N^2} - \frac{(j-1)^2}{N^2} = \frac{2j-1}{N^2}$$

である。

以上、(ア)(イ)より、 $M=j$ となる確率は

$$\frac{2j-1}{N^2}$$

である。

$$(答) \frac{2j-1}{N^2}$$

(iii)

k の値により場合分けして考える。

(ア) $2 \leq k \leq N+1$ のとき

$X+Y=k$ となる X, Y の組み合わせは

$$(X, Y) = (1, k-1), (2, k-2), \dots, (k-1, 1)$$

であるから、 $k-1$ 通りである。よって、この確率は $\frac{k-1}{N^2}$ である。

(イ) $N+2 \leq k \leq 2N$ のとき

$X+Y=k$ となる X, Y の組み合わせは

$$(X, Y) = (k-N, N), (k-N+1, N-1), \dots, (N, k-N)$$

であるから、 $2N-k+1$ 通りである。よって、この確率は $\frac{2N-k+1}{N^2}$ である。

以上、(ア)(イ)から

$$\begin{cases} 2 \leq k \leq N+1 \text{ のとき} & \frac{k-1}{N^2} \\ N+2 \leq k \leq 2N \text{ のとき} & \frac{2N-k+1}{N^2} \end{cases}$$

となる。

$$(答) \begin{cases} 2 \leq k \leq N+1 \text{ のとき} & \frac{k-1}{N^2} \\ N+2 \leq k \leq 2N \text{ のとき} & \frac{2N-k+1}{N^2} \end{cases}$$