I

(i)

与えられた式の両辺に$n(>0)$を掛けて,

$$nS_n{}^2-(n^3+n^2-1)S_n-(n+1)n=0$$
$$\Leftrightarrow (nS_n+1)(S_n-n^2-n)=0$$
$$\Leftrightarrow S_n=-\frac{1}{n},\ n^2+n$$

となる。数列$\{a_n\}$は各項が正であるので，$S_n>0$となる。よって,

$$S_n=n^2+n$$

と分かる。

(答) $S_n=n^2+n$

(ii)

$n=1$のとき,

$$a_1=S_1=1^2+1=2$$

である。$n\geqq 2$のとき,

$$\begin{aligned} a_n&=S_n-S_{n-1}\\ &=(n^2+n)-\{(n-1)^2+(n-1)\}\\ &=2n \end{aligned}$$

となり，これは$n=1$のときも成立する。よって，数列$\{a_n\}$の一般項は

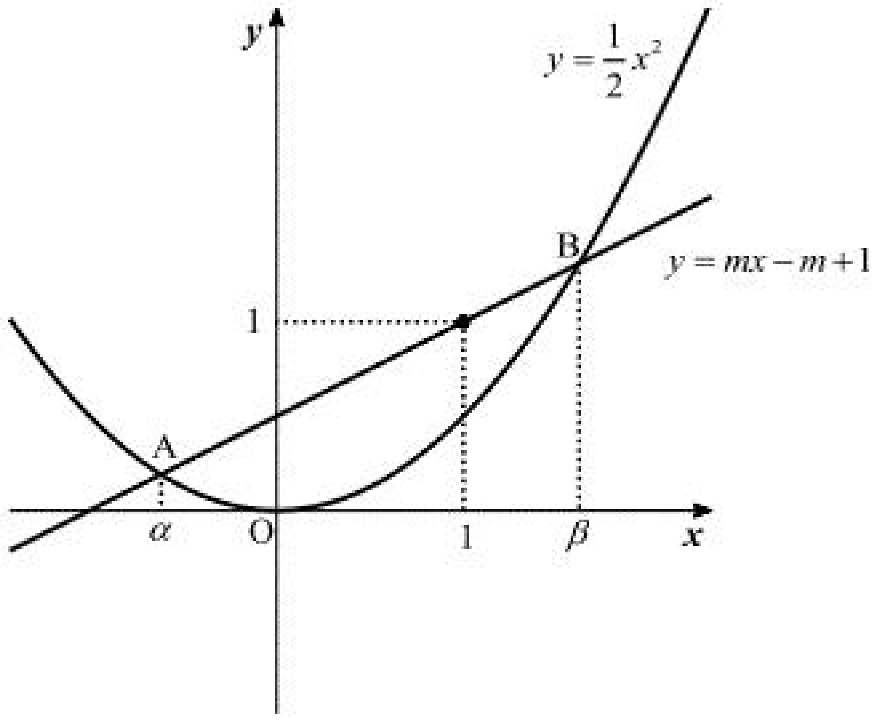
$$a_n=2n$$

となる。

(答) $a_n=2n$

Ⅱ

(i)



点$(1, 1)$を通り，傾きがmの直線の方程式は

$$y=m(x-1)+1$$
$$\therefore y=mx-m+1$$

と表せる。直線の交点A, Bのx座標をそれぞれα, βとおく。このとき$\alpha<\beta$としても一般性を失わない。直線の方程式と放物線の方程式$y=\frac{1}{2}x^2$よりyを消去すると，

$$\frac{1}{2}x^2=mx-m+1$$
$$\Leftrightarrow x^2-2mx+2m-2=0$$

となり，この方程式の2つの解が$x=\alpha, \beta$であることから，解と係数の関係より

$$\begin{cases}\alpha+\beta=2m\\ \alpha\beta=2m-2\end{cases}$$

が成立する。このとき$\beta-\alpha$は，

$$\begin{aligned}\beta-\alpha&=\sqrt{(\beta-\alpha)^2}\ (\because \beta-\alpha>0)\\ &=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}\\ &=\sqrt{(2m)^2-4(2m-2)}\\ &=\sqrt{4m^2-8m+8}\end{aligned}$$

となる。以上より，線分ABの長さは

$$\begin{aligned}\mathrm{AB}&=\sqrt{(\beta-\alpha)^2+\left(\frac{1}{2}\beta^2-\frac{1}{2}\alpha^2\right)^2}\\ &=\sqrt{(\beta-\alpha)^2+\frac{1}{4}(\beta-\alpha)^2(\beta+\alpha)^2}\\ &=\sqrt{(4m^2-8m+8)+\frac{1}{4}\cdot(4m^2-8m+8)\cdot 4m^2}\\ &=2\sqrt{(m^2+1)(m^2-2m+2)}\end{aligned}$$

となる。

(答)　$2\sqrt{(m^2+1)(m^2-2m+2)}$

(ii)

$\triangle$OABは2つのベクトル$\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{OB}}$によって作られる三角形であるから，その面積$S$は

$$S=\frac{1}{2}\left|\alpha\cdot\frac{\beta^2}{2}-\frac{\alpha^2}{2}\cdot\beta\right|$$

となり，

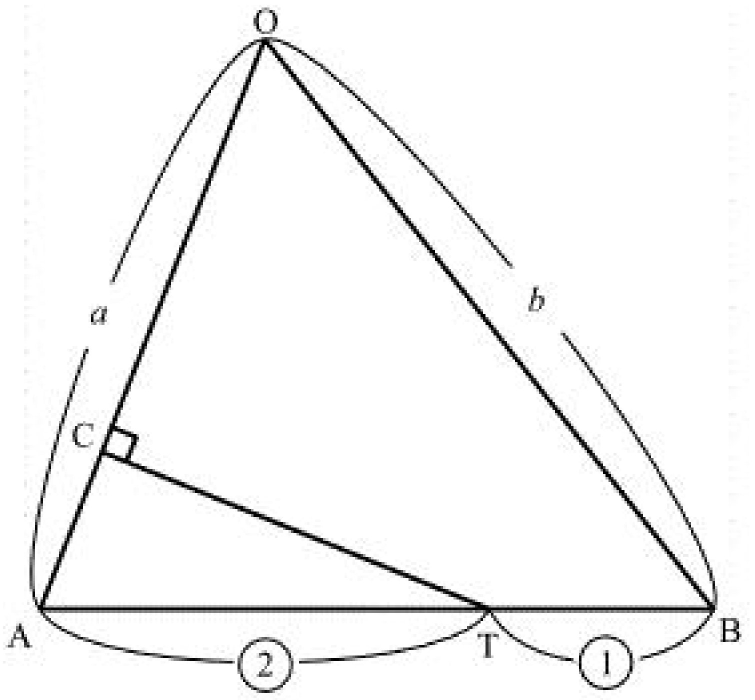
$$\begin{aligned}S^2&=\frac{1}{4}\left(\alpha\cdot\frac{\beta^2}{2}-\frac{\alpha^2}{2}\cdot\beta\right)^2\\ &=\frac{1}{16}(\alpha\beta)^2(\beta-\alpha)^2\\ &=\frac{1}{16}\cdot 4(m-1)^2(4m^2-8m+8)\\ &=(m-1)^2(m^2-2m+2)\end{aligned}$$

となる。

(答)　$S^2=(m-1)^2(m^2-2m+2)$

III

(i)



Tは辺ABを2:1に内分するので,

$$\overrightarrow{\mathrm{OT}}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

と表せる。

(答) $\overrightarrow{\mathrm{OT}}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

(ii)

点Cは直線OA上にあるので，実数sを用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}$$

と表される。$\angle\mathrm{OCT}=\frac{\pi}{2}$であることから$\mathrm{OA}\perp\mathrm{CT}$であるので,

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CT}}=0\\
&\Leftrightarrow\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{OT}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)=0\\
&\Leftrightarrow\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\left\{\left(\frac{1}{3}-s\right)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right\}=0\\
&\Leftrightarrow\left(\frac{1}{3}-s\right)\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2+\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0\\
&\Leftrightarrow\left(\frac{1}{3}-s\right)a^2+\frac{2}{3}k=0\\
&\Leftrightarrow s=\frac{a^2+2k}{3a^2}
\end{aligned}$$

となる。よって

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\frac{a^2+2k}{3a^2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$$

となる。ここで，$\cos\angle\mathrm{AOB}>0\left(\because 0<\angle\mathrm{AOB}<\frac{\pi}{2}\right)$より,

$$\begin{aligned}
k&=\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}\\
&=\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|\cos\angle\mathrm{AOB}\\
&>0
\end{aligned}$$

$$\therefore\frac{a^2+2k}{3a^2}>0$$

であるので，線分OCの長さは

$$\begin{aligned}
\left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|&=\frac{a^2+2k}{3a^2}\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|\\
&=\frac{a^2+2k}{3a^2}\cdot a\\
&=\frac{a^2+2k}{3a}
\end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{a^2+2k}{3a}$

Ⅳ

(i)

全てのボールの取り出し方は

$$N\times(N-1)=N(N-1)\text{（通り）}$$

であり，これらは同様に確からしい。$M \leqq j$ となるためには $X \leqq j$ かつ $Y \leqq j$ となればよく，このようなボールの取り出し方は

$$j\times(j-1)=j(j-1)\text{（通り）}$$

であるので，求める確率は $\dfrac{j(j-1)}{N(N-1)}$ となる。

（答）$\dfrac{j(j-1)}{N(N-1)}$

(ii)

$j=2$ のとき，条件を満たす X, Y の組は $(X, Y)=(1, 2), (2, 1)$ となり，確率は $\dfrac{2}{N(N-1)}$ となる。

$j \geqq 3$ のとき，$M=j$ となる確率は $M \leqq j$ となる確率から $M \leqq j-1$ となる確率を引いたものに等しく，

$$\frac{j(j-1)}{N(N-1)}-\frac{(j-1)(j-2)}{N(N-1)}=\frac{2(j-1)}{N(N-1)}$$

となり，これは $j=2$ のときも満たしている。

（答）$\dfrac{2(j-1)}{N(N-1)}$

(iii)

合計が偶数 k となるような1以上 N 以下の2つの整数の組は

$$(N, k-N), (N-1, k-N-1), \cdots, (k-N, N)$$

の $2N-k+1$ 通りであるが，このうち $\left(\dfrac{k}{2}, \dfrac{k}{2}\right)$ は同じボールが使われることになるため (X, Y) の組としては適さない。よって，条件を満たす (X, Y) の組は $2N-k$ 通りとなり，求める確率は $\dfrac{2N-k}{N(N-1)}$ となる。

（答）$\dfrac{2N-k}{N(N-1)}$