

I

(1)

$$|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=1, \angle BOA=45^\circ \text{ より,}$$

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = |\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{OB}| \cdot \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

である。また,

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{AB}|^2 &= |\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}|^2 \\ &= |\overrightarrow{OB}|^2 - 2 \cdot \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + |\overrightarrow{OA}|^2 \\ &= 1 - \sqrt{2} + 1 \\ &= 2 - \sqrt{2} \end{aligned}$$

より,

$$AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{2 - \sqrt{2}} \quad (\because |\overrightarrow{AB}| > 0)$$

が得られる。

$$\text{(答)} \quad \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \frac{\sqrt{2}}{2}, AB = \sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

(2)

(R_1, R_2) の組み合わせは $6^2 = 36$ (通り) であり, これらは同様に確からしく起こる。 $\overrightarrow{OR_1}$ と $\overrightarrow{OR_2}$ のなす角を θ とおくと,

$$\overrightarrow{OR_1} \cdot \overrightarrow{OR_2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow |\overrightarrow{OR_1}| |\overrightarrow{OR_2}| \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

となる。点 R_1, R_2 は点 A, B, C, D, E, F のいずれかであるので, $|\overrightarrow{OR_1}|, |\overrightarrow{OR_2}|$ は $1, \sqrt{2}$ のいずれかであり, θ は $0^\circ, 45^\circ, 90^\circ, 135^\circ, 180^\circ$ のいずれかである。よって, 上の等式を満たすのは,

$|\overrightarrow{OR_1}| = |\overrightarrow{OR_2}| = 1$ かつ $\theta = 45^\circ$ のときのみであるから, $\overrightarrow{OR_1} \cdot \overrightarrow{OR_2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ となる (R_1, R_2) の組み合わせは,

$$(R_1, R_2) = (A, B), (B, A), (C, D), (D, C)$$

の 4 通りである。ゆえに, 求める確率は,

$$\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad \frac{1}{9}$$

(3)

$P = p_1 p_2 \cdots p_{n-1} p_n$ において, $P \neq 0$ となる確率 q を求める。 R_i の組み合わせは 6 通りであり, これらは同様に確からしく起こる。ここで, $p_i = 0$ となるのは,

$$(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) \perp \overrightarrow{OR_i}$$

となるときである。 $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ は直線 AD に垂直なベクトルであるので, 直線 AD に平行である $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ は $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ に直交する。一方, $\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OF}$ は直線 AD と平行でないので, $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ と直交しない。よって, $p_i = 0$ となる R_i の組み合わせは $R_i = A, D$ の 2 通りである。ここで, $P \neq 0$ となるのは, $p_1, p_2, \dots, p_n$ がすべて 0 でないときであるので,

$$q = \frac{(6-2)^n}{6^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

である。また, 求める確率はこの事象の余事象の確率であるから,

$$1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

となる。

$$\text{(答)} \quad 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

II

(1)

$1+3+5+\cdots(2n-1)$ は初項1, 公差2 の等差数列の第 n 項までの和であるので,

$$1+3+5+\cdots(2n-1)=\frac{n}{2}\{(2n-1)+1\}=n^2$$

となる。

(答) n^2

(2)

数学的帰納法を利用して,

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4} \quad \cdots \textcircled{1}$$

が成り立つことを示す。

[1] $n=1$ のとき

①について,

$$(\text{左辺})=1^3=1$$

$$(\text{右辺})=\frac{1^2(1+1)^2}{4}=1$$

となるから, ①は成り立つ。

[2] $n=k$ のとき

①が成り立つとすると, $n=k+1$ のとき,

$$\begin{aligned} 1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3+(k+1)^3 &= \frac{k^2(k+1)^2}{4}+(k+1)^3 \\ &= \frac{(k+1)^2\{k^2+4(k+1)\}}{4} \\ &= \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4} \end{aligned}$$

となるから, $n=k+1$ のときも①が成り立つ。

以上[1], [2]より, 数学的帰納法から, 題意は示された。

(証明終)

(3)

$$\begin{aligned} 1^3+3^3+5^3+\cdots+(2n-1)^3 &= \sum_{k=1}^n(2k-1)^3 \\ &= \sum_{k=1}^n(8k^3-12k^2+6k-1) \\ &= 8\sum_{k=1}^nk^3-12\sum_{k=1}^nk^2+6\sum_{k=1}^nk-\sum_{k=1}^n1 \end{aligned}$$

ここで, (2)及び(3)の等式より,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^nk^3 &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} \\ \sum_{k=1}^nk^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \end{aligned}$$

である。また, 初項1, 項差1 の等差数列の第 n 項までの和は,

$$\sum_{k=1}^nk=\frac{n(n+1)}{2}$$

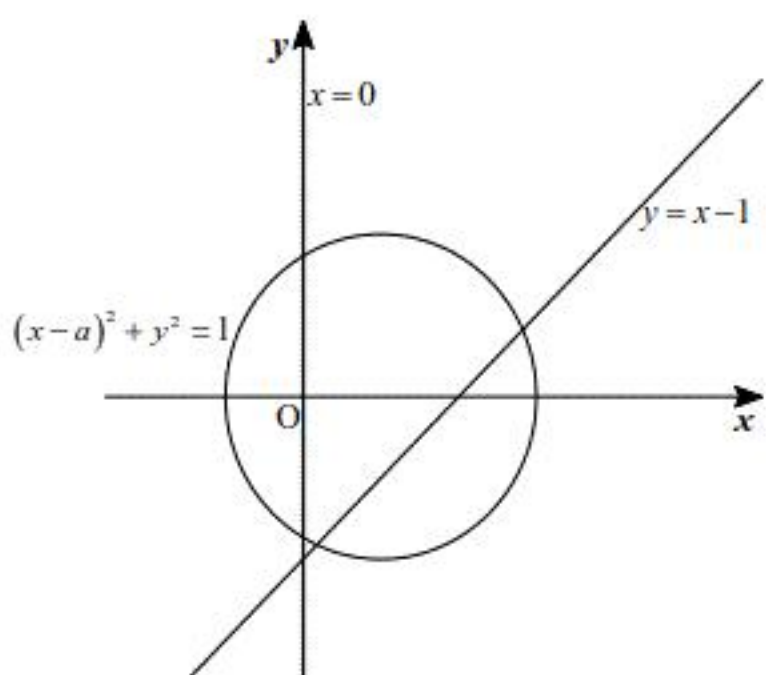
であるので, 求める値は

$$\begin{aligned} 8\sum_{k=1}^n8k^3-12\sum_{k=1}^nk^2+6\sum_{k=1}^nk-\sum_{k=1}^n1 &= 8\cdot\frac{n^2(n+1)^2}{4}-12\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+6\cdot\frac{n(n+1)}{2}-n \\ &= 2n^2(n+1)^2-2n(n+1)(2n+1)+3n(n+1)-n \\ &= n^2(2n^2-1) \end{aligned}$$

となる。

(答) $n^2(2n^2-1)$

Ⅲ



(1)

直線 L_1 と円 C が共有点を持つとき、 $x=0$ を $(x-a)^2 + y^2 = 1$ に代入して得られる y について

の 2 次方程式

$$\begin{aligned} (-a)^2 + y^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow y^2 + a^2 - 1 &= 0 \end{aligned}$$

が実数解をもつので、この方程式の判別式を D_1 として、

$$\begin{aligned} D_1 &\geq 0 \\ \Leftrightarrow -4(a^2 - 1) &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\therefore -1 \leq a \leq 1 \quad \dots \textcircled{1}$$

が得られる。同様に、直線 L_2 と円 C が共有点を持つとき、 $y=x-1$ を $(x-a)^2 + y^2 = 1$ に代

入して得られる x についての 2 次方程式

$$\begin{aligned} (x-a)^2 + (x-1)^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow 2x^2 - 2(a+1)x + a^2 &= 0 \end{aligned}$$

が実数解をもつので、この方程式の判別式を D_2 として、

$$\begin{aligned} D_2 &\geq 0 \\ \Leftrightarrow \frac{D_2}{4} &\geq 0 \\ \Leftrightarrow (a+1)^2 - 2a^2 &\geq 0 \\ \Leftrightarrow a^2 - 2a - 1 &\leq 0 \\ \therefore 1 - \sqrt{2} \leq a &\leq 1 + \sqrt{2} \quad \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

が得られる。したがって、これら①、②を合わせて、求める範囲は、

$$1 - \sqrt{2} \leq a \leq 1$$

となる。

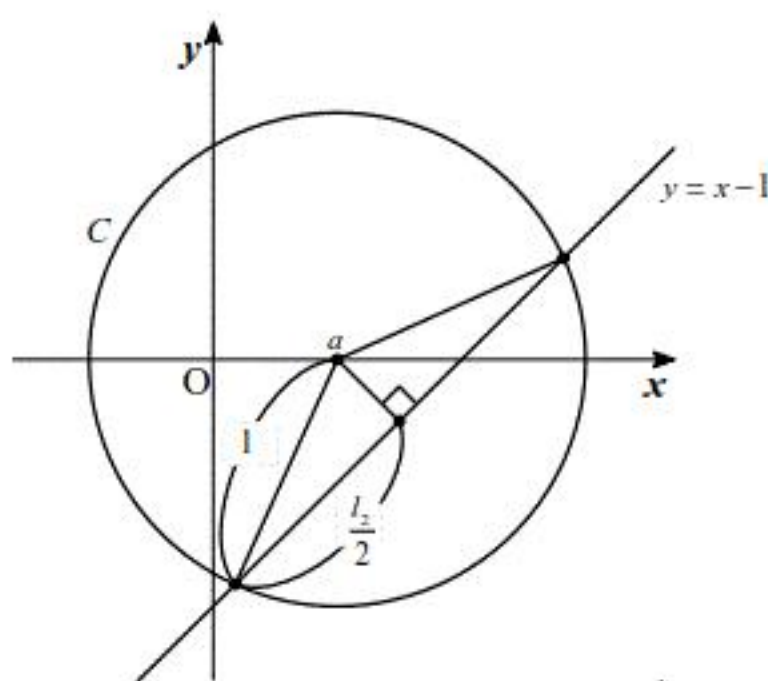
(答) $1 - \sqrt{2} \leq a \leq 1$

(2)

直線 L_1 と円 C の共有点の y 座標は、 $\pm\sqrt{1-a^2}$ であるから、

$$l_1 = \sqrt{1-a^2} - (-\sqrt{1-a^2}) = 2\sqrt{1-a^2}$$

である。次に、下図の 3 角形を利用して l_2 値を求める。



直線 L_2 と円 C の中心 $(a, 0)$ との距離は、

$$\frac{|a-0-1|}{\sqrt{2}} = \frac{|a-1|}{\sqrt{2}}$$

であるので、三平方の定理より、

$$\begin{aligned} \left(\frac{l_2}{2}\right)^2 &= 1^2 - \left(\frac{|a-1|}{\sqrt{2}}\right)^2 \\ \Leftrightarrow l_2^2 &= 4 - 2(a-1)^2 \\ \therefore l_2 &= \sqrt{-2a^2 + 4a + 2} \end{aligned}$$

が得られる。

(答) $l_1 = 2\sqrt{1-a^2}, l_2 = \sqrt{-2a^2 + 4a + 2}$

(3)

(2)より、

$$\begin{aligned} l_1^2 + l_2^2 &= 4(1-a^2) + (-2a^2 + 4a + 2) \\ &= -6a^2 + 4a + 6 \\ &= -6\left(a - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{20}{3} \end{aligned}$$

となるから、 $l_1^2 + l_2^2$ は、 $a = \frac{1}{3}$ で最大値 $\frac{20}{3}$ をとる。これは、 $1 - \sqrt{2} \leq a \leq 1$ を満たす。

(答) 最大値: $\frac{20}{3}$, $a = \frac{1}{3}$