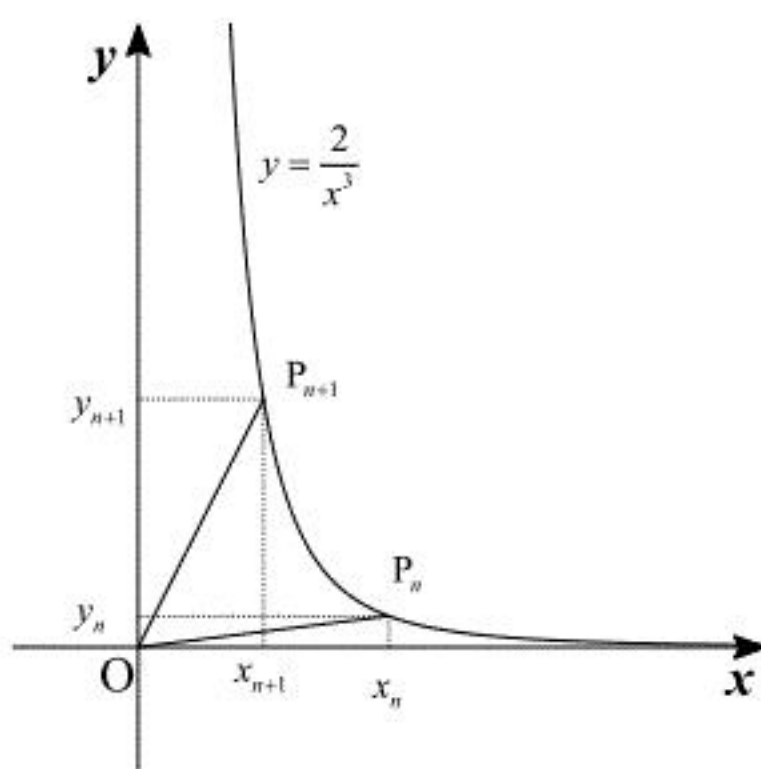


〔解答〕

ア	イ	ウ	エ
i	e	a	o

〔解説〕



上図より

$$\begin{aligned}
 S_n &= \frac{1}{2}x_{n+1}y_{n+1} + \int_{x_{n+1}}^{x_n} \frac{2}{x^3} dx - \frac{1}{2}x_n y_n \\
 &= \frac{1}{x_{n+1}^2} - \frac{1}{x_n^2} + \left[-\frac{1}{x^2} \right]_{x_{n+1}}^{x_n} \\
 &= \frac{1}{x_{n+1}^2} - \frac{1}{x_n^2} + \left(\frac{1}{x_{n+1}^2} - \frac{1}{x_n^2} \right) \\
 &= 2 \left(\frac{1}{x_{n+1}^2} - \frac{1}{x_n^2} \right)
 \end{aligned}$$

と求められる。また、初項1、公比 $\frac{2}{3}$ の等比数列の第 n 項までの和 T_n は

$$T_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{2}{3} \right)^{k-1} = \frac{1 - \left(\frac{2}{3} \right)^n}{1 - \frac{2}{3}} = 3 \left\{ 1 - \left(\frac{2}{3} \right)^n \right\}$$

と求まる。さらに、 $y = \frac{2}{x^3}$ のとき、

$$y' = -\frac{6}{x^4}$$

であり、 P_n における C の接線の方程式は

$$y = -\frac{6}{x_n^4}(x - x_n) + \frac{2}{x_n^3} \Leftrightarrow y = -\frac{6}{x_n^4}x + \frac{8}{x_n^3}$$

であるから、これと x 軸との交点の x 座標を r_n とおくと

$$0 = -\frac{6}{x_n^4}r_n + \frac{8}{x_n^3} \Leftrightarrow r_n = \frac{4}{3}x_n$$

となる。ここで

$$r_n T_n = \frac{4}{3}$$

を満たすとする

$$\frac{4}{3}x_n \cdot 3 \left\{ 1 - \left(\frac{2}{3} \right)^n \right\} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow x_n = \frac{1}{3 \left\{ 1 - \left(\frac{2}{3} \right)^n \right\}} \quad (\because n > 0)$$

となるから

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3 \left\{ 1 - \left(\frac{2}{3} \right)^n \right\}} = \frac{1}{3(1-0)} = \frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n S_k &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n 2 \left(\frac{1}{x_{k+1}^2} - \frac{1}{x_k^2} \right) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \left\{ \left(\frac{1}{x_2^2} - \frac{1}{x_1^2} \right) + \left(\frac{1}{x_3^2} - \frac{1}{x_2^2} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{x_{n+1}^2} - \frac{1}{x_n^2} \right) \right\} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \left(\frac{1}{x_{n+1}^2} - \frac{1}{x_1^2} \right) \\
 &= 2(3^2 - 1^2) \\
 &= 16
 \end{aligned}$$

と求めることができる。

【解答】

オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ	シ
d	i	c	m	f	k	n	g

【解説】

点 $P(t, t^2)$ における放物線 $y = x^2$ の接線を ℓ とすると

$$y' = 2x$$

より、 ℓ の方程式は

$$y = 2t(x - t) + t^2 \Leftrightarrow y = 2tx - t^2$$

である。 t が $0 \leq t \leq 1$ の範囲を動くときに ℓ が通過する領域を D とする。ここで、 x を固定して $y = 2tx - t^2$ を t の 2 次関数とみなす。このとき

$$y = -t^2 + 2xt \Leftrightarrow y = -(t - x)^2 + x^2$$

と変形できるから、 yt 平面においてこの関数のグラフは上に凸な放物線であり、軸は $t = x$

である。以下 x の値で場合分けをして、 y のとり得る値の範囲を調べる。

[1-1] $x \leq 0$ のとき

y は $0 \leq t \leq 1$ の範囲で単調減少するから、 y のとり得る値の範囲は

$$2x - 1 \leq y \leq 0$$

である。

[1-2] $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ のとき

y は $t = x$ で最大値、 $t = 1$ で最小値をとるから、 y のとり得る値の範囲は

$$2x - 1 \leq y \leq x^2$$

である。

[1-3] $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$ のとき

y は $t = x$ で最大値、 $t = 0$ で最小値をとるから、 y のとり得る値の範囲は

$$0 \leq y \leq x^2$$

である。

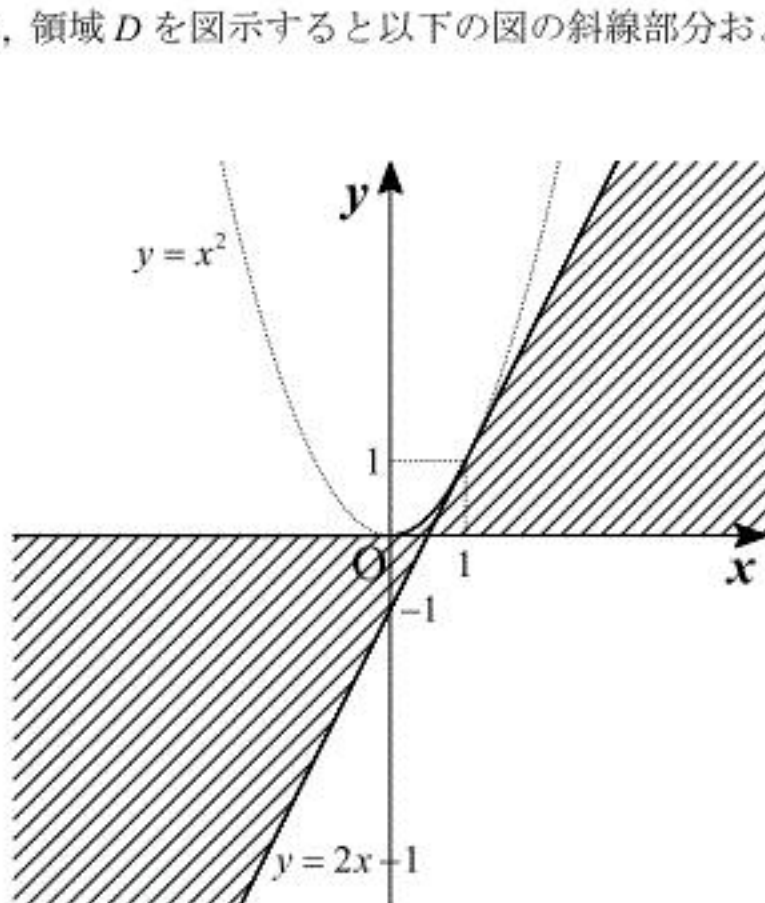
[1-4] $1 \leq x$ のとき

y は $0 \leq t \leq 1$ の範囲で単調増加するから、 y のとり得る値の範囲は

$$0 \leq y \leq 2x - 1$$

である。

以上、[1-1]～[1-4]より、領域 D を図示すると以下の図の斜線部分および境界上となる。



次に、 a を定数として $A(0, a)$ とする。点 Q が領域 D 上を動くとき、線分 AQ の長さが最小となる場合を考える。これは点 A が D の内部および境界上にあるとき、すなわち $-1 \leq a \leq 0$ のときは点 Q が点 A と一致するときで最小値は 0 である。点 A が D の外部および境界線にあるとき、すなわち $a \leq -1, 0 \leq a$ のときは点 A と直線 $y = 0, y = 2x - 1$ との距離は、点と直線の距離の公式を用いるとそれぞれ

$$|a|, \frac{|a+1|}{\sqrt{5}}$$

となる。また、点 A と放物線上の点 (t, t^2) との距離は

$$\sqrt{t^2 + (t^2 - a)^2} = \sqrt{t^4 - (2a-1)t^2 + a^2} = \sqrt{\left(t^2 - \frac{2a-1}{2}\right)^2 + a - \frac{1}{4}} \quad \cdots \textcircled{1}$$

となるから、点 A と放物線 C の $0 \leq x \leq 1$ の部分の距離の最小値は、 $0 \leq t \leq 1$ における①の

最小値となる。ここで、 $0 \leq t \leq 1$ より $0 \leq t^2 \leq 1$ であり、 $a \leq \frac{1}{2}$ のとき $\frac{2a-1}{2} \leq 0$ となるから、

①は $0 \leq t \leq 1$ の範囲で単調増加する。よって最小値は、 $t = 0$ のときで

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

となる。また、 $\frac{1}{2} \leq a \leq \frac{3}{2}$ のとき $0 \leq \frac{2a-1}{2} \leq 1$ となるから、①の最小値は、 $t = \frac{2a-1}{2}$ のとき

で

$$\sqrt{a - \frac{1}{4}}$$

となる。さらに、 $a \geq \frac{3}{2}$ のとき $\frac{2a-1}{2} \geq 1$ となるから、①は $0 \leq t \leq 1$ の範囲で単調減少する。

よって最小値は、 $t = 1$ のときで

$$\sqrt{a^2 - 2a + 2}$$

となる。したがって、 AQ の長さの最小値となりうる値は以下の表ようになる。

	$ a $	$\frac{ a+1 }{\sqrt{5}}$	$\sqrt{\left(t^2 - \frac{2a-1}{2}\right)^2 + a - \frac{1}{4}}$
$a \leq -1$	$-a$	$-\frac{a+1}{\sqrt{5}}$	$-a$
$0 \leq a \leq \frac{1}{2}$	a	$\frac{a+1}{\sqrt{5}}$	a
$\frac{1}{2} \leq a \leq \frac{3}{2}$	a	$\frac{a+1}{\sqrt{5}}$	$\sqrt{a - \frac{1}{4}}$
$\frac{3}{2} \leq a$	a	$\frac{a+1}{\sqrt{5}}$	$\sqrt{a^2 - 2a + 2}$

[2-1] $a \leq -1$ のとき

$$-a - \left(-\frac{a+1}{\sqrt{5}}\right) = \frac{1 - (\sqrt{5}-1)a}{\sqrt{5}} > 0 \quad (\because a < 0)$$

より、線分 AQ の長さの最小値は $-\frac{a+1}{\sqrt{5}}$ である。

[2-2] $0 \leq a \leq \frac{1}{2}$ のとき

$$\frac{a+1}{\sqrt{5}} - a = \frac{1 - (\sqrt{5}-1)a}{\sqrt{5}} \geq \frac{1 - \frac{\sqrt{5}-1}{2}}{\sqrt{5}} = \frac{3 - \sqrt{5}}{2\sqrt{5}} > 0$$

より、線分 AQ の長さの最小値は a である。

[2-3] $\frac{1}{2} \leq a \leq \frac{3}{2}$ のとき

$$a - \sqrt{a - \frac{1}{4}} = \frac{a^2 - \left(a - \frac{1}{4}\right)}{a + \sqrt{a - \frac{1}{4}}} = \frac{(2a-1)^2}{4a + 2\sqrt{4a-1}} \geq 0$$

$$\frac{a+1}{\sqrt{5}} - \sqrt{a - \frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{5}(a+1)^2 - \left(a - \frac{1}{4}\right)}{\frac{a+1}{\sqrt{5}} + \sqrt{a - \frac{1}{4}}} = \frac{4(a+1)^2 - 5(4a-1)}{4\sqrt{5}(a+1) + 10\sqrt{4a-1}}$$

$$= \frac{4a^2 - 12a + 9}{4\sqrt{5}(a+1) + 10\sqrt{4a-1}}$$

$$= \frac{(2a-3)^2}{5\left(\sqrt{a^2 - 2a + 2} + \frac{a+1}{\sqrt{5}}\right)}$$

$$\geq 0$$

より、線分 AQ の長さの最小値は $\sqrt{a - \frac{1}{4}}$ である。

[2-4] $\frac{3}{2} \leq a$ のとき

$$a - \frac{a+1}{\sqrt{5}} = \frac{(\sqrt{5}-1)a - 1}{\sqrt{5}} \geq \frac{\frac{3}{2}(\sqrt{5}-1) - 1}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}-5}{2\sqrt{5}} > 0$$

$$\sqrt{a^2 - 2a + 2} - \frac{a+1}{\sqrt{5}} = \frac{a^2 - 2a + 2 - \frac{1}{5}(a+1)^2}{\sqrt{a^2 - 2a + 2} + \frac{a+1}{\sqrt{5}}}$$

$$= \frac{4a^2 - 12a + 9}{5\left(\sqrt{a^2 - 2a + 2} + \frac{a+1}{\sqrt{5}}\right)}$$

$$= \frac{(2a-3)^2}{5\left(\sqrt{a^2 - 2a + 2} + \frac{a+1}{\sqrt{5}}\right)}$$

$$\geq 0$$

より、線分 AQ の長さの最小値は $\frac{a+1}{\sqrt{5}}$ である。

以上[2-1]～[2-4]より、線分 AQ の長さの最小値は

$$a \leq -1 \quad \text{のとき} \quad -\frac{a+1}{\sqrt{5}}$$

$$-1 \leq a \leq 0 \quad \text{のとき} \quad 0$$

$$0 \leq a \leq \frac{1}{2} \quad \text{のとき} \quad a$$

$$\frac{1}{2} \leq a \leq \frac{3}{2} \quad \text{のとき} \quad \sqrt{a - \frac{1}{4}}$$

$$\frac{3}{2} \leq a \quad \text{のとき} \quad \frac{a+1}{\sqrt{5}}$$

であることがわかる。

Ⅲ

(1)

直線 ℓ の方程式は

$$y = -\tan \theta (x - a) + b \Leftrightarrow y = (-\tan \theta)x + a \tan \theta + b$$

であるから、 $P\left(a + \frac{b}{\tan \theta}, 0\right), Q(0, a \tan \theta + b)$ である。よって、 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ より

$$\begin{aligned} AP &= \sqrt{\left(a + \frac{b}{\tan \theta} - a\right)^2 + (0 - b)^2} \\ &= b\sqrt{1 + \frac{1}{\tan^2 \theta}} \quad (\because b > 0) \\ &= b\sqrt{\frac{1}{\sin^2 \theta}} \\ &= \frac{b}{\sin \theta} \quad \left(\because 0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right) \\ AQ &= \sqrt{(0 - a)^2 + (a \tan \theta + b - b)^2} \\ &= a\sqrt{1 + \tan^2 \theta} \quad (\because a > 0) \\ &= a\sqrt{\frac{1}{\cos^2 \theta}} \\ &= \frac{a}{\cos \theta} \quad \left(\because 0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

$$PQ = AP + AQ = \frac{b}{\sin \theta} + \frac{a}{\cos \theta}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad AP = \frac{b}{\sin \theta}, \quad AQ = \frac{a}{\cos \theta}, \quad PQ = \frac{b}{\sin \theta} + \frac{a}{\cos \theta}$$

(2)

(1)の結果より

$$L(\theta) = \frac{b}{\sin \theta} + \frac{a}{\cos \theta}$$

であるから、

$$\begin{aligned} L'(\theta) &= -\frac{b \cos \theta}{\sin^2 \theta} + \frac{a \sin \theta}{\cos^2 \theta} \\ &= \frac{a \sin^3 \theta - b \cos^3 \theta}{\sin^2 \theta \cos^2 \theta} \\ &= \frac{\left(a^{\frac{1}{3}} \sin \theta - b^{\frac{1}{3}} \cos \theta\right) \left\{\left(a^{\frac{1}{3}} \sin \theta\right)^2 + (ab)^{\frac{1}{3}} \sin \theta \cos \theta + \left(b^{\frac{1}{3}} \cos \theta\right)^2\right\}}{\sin^2 \theta \cos^2 \theta} \\ &= \frac{a^{\frac{1}{3}} \left\{\tan \theta - \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{3}}\right\} \left\{\left(a^{\frac{1}{3}} \sin \theta\right)^2 + (ab)^{\frac{1}{3}} \sin \theta \cos \theta + \left(b^{\frac{1}{3}} \cos \theta\right)^2\right\}}{\sin^2 \theta \cos \theta} \end{aligned}$$

となる。よって、 α を $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ 、および $\tan \alpha = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{3}}$ を満たす実数とすると、 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ における $L(\theta)$ の増減表は以下のようになる。

θ	(0)	...	α	...	$\left(\frac{\pi}{2}\right)$
$L'(\theta)$		-	0	+	
$L(\theta)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$	

以上より、 $L(\theta)$ が最小となるのは $\theta = \alpha$ のときであり、このとき

$$\tan \theta = \tan \alpha = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{3}}$$

であり、さらに

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cos^2 \theta} &= \tan^2 \theta + 1 = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + 1 \\ \frac{1}{\sin^2 \theta} &= \frac{1}{\tan^2 \theta} + 1 = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{2}{3}} + 1 \end{aligned}$$

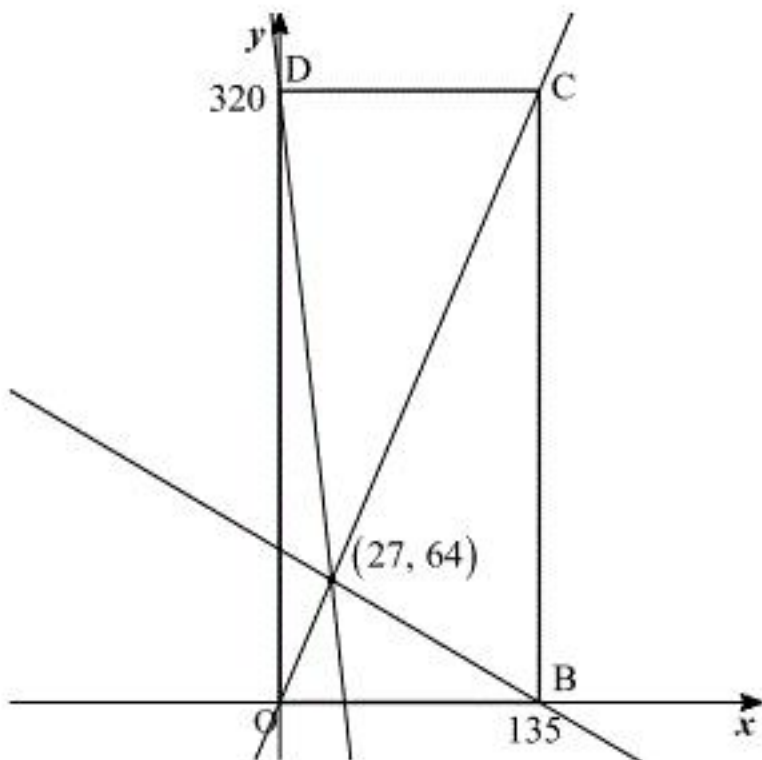
より、 $L(\theta)$ の値は

$$\begin{aligned} L(\theta) &= b\sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{2}{3}} + 1} + a\sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + 1} \quad (\because \sin \theta, \cos \theta > 0) \\ &= b^{\frac{2}{3}}\sqrt{a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}} + a^{\frac{2}{3}}\sqrt{b^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{2}{3}}} \\ &= \left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \tan \theta = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{3}}, \quad L(\theta) = \left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$$

(3)



上図より、 m が最小となるのは、直線 k が点 D を通るときであり、このとき

$$m = \frac{64 - 320}{27 - 0} = -\frac{256}{27}$$

である。また、 m が最大となるのは、直線 k が点 B を通るときであり、このとき

$$m = \frac{64 - 0}{27 - 135} = -\frac{16}{27}$$

である。以上より、 m のとりうる範囲は

$$-\frac{256}{27} \leq m \leq -\frac{16}{27} \quad \cdots \textcircled{1}$$

である。ここで、この範囲においては K は直線 k のうち第1象限にある部分の長さと一致し、

$m = -\tan \theta$ を満たす $\theta \left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$ に対し

$$K = L(\theta)$$

が成り立つ。また、(2)で求めた $\tan \alpha$ に $(a, b) = (27, 64)$ を代入すると

$$\tan \alpha = \left(\frac{64}{27}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{4}{3}$$

となることから

$$-\frac{256}{27} < -\frac{4}{3} < -\frac{16}{27}$$

より、 $\textcircled{1}$ において K が最小となるのは $\theta = \alpha$ 、すなわち $m = -\frac{4}{3}$ のときであり、このときの K

の値は、(2)の結果に $(a, b) = (27, 64)$ を代入することで

$$K = \left(27^{\frac{2}{3}} + 64^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} = (9 + 16)^{\frac{3}{2}} = 125$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad m \text{ のとりうる値の範囲} : -\frac{256}{27} \leq m \leq -\frac{16}{27}, \quad K \text{ の最小値 } M : 125$$

(4)

点 $(27, 64)$ は長方形の対角線 OC 上にあり、直線 BC に対して原点 O と同じ側にあることに

注意すると、(3)で考慮していないのは直線 k が

- [1] 辺 OB および辺 CD と交わるとき
- [2] 辺 BC および辺 OD と交わるとき

のいずれかであるが、[1]のとき、

$$K \geq BC = 320$$

が成り立ち、[2]のとき、

$$K \geq CD = 135$$

が成り立つ。以上より、 K の値は常に125以上となることが示された。

(証明終)

IV

(1)

関数 $f_n(x)$ の導関数、2 次導関数を計算すると

$$f'_n(x) = \frac{n(\log x)^{n-1} \cdot \frac{1}{x} \cdot x - (\log x)^n}{x^2} = \frac{(n - \log x)(\log x)^{n-1}}{x^2} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\begin{aligned} f''_n(x) &= \frac{\left\{ n(n-1)(\log x)^{n-2} - n(\log x)^{n-1} \right\} \cdot \frac{1}{x} \cdot x^2 - (n - \log x)(\log x)^{n-1} \cdot 2x}{x^4} \\ &= \frac{\left\{ 2(\log x)^2 - 3n \log x + n(n-1) \right\} (\log x)^{n-2}}{x^3} \end{aligned}$$

となるから、 $x \geq 1$ において

$$f'_n(x) = 0 \Leftrightarrow \log x = 0 \quad \text{または} \quad n - \log x = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1, e^n$$

$$f''_n(x) = 0 \Leftrightarrow \log x = 0 \quad \text{または} \quad 2(\log x)^2 - 3n \log x + n(n-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \log x = 0, \frac{3n \pm \sqrt{9n^2 - 8n(n-1)}}{4}$$

$$\Leftrightarrow x = 1, e^{\frac{3n \pm \sqrt{n^2 + 8n}}{4}}$$

であり、 $n \geq 2$ のとき $n < \sqrt{n^2 + 8n} < 3n$ であるから

$$\therefore 1 < e^{\frac{3n - \sqrt{n^2 + 8n}}{4}} < e^n < e^{\frac{3n + \sqrt{n^2 + 8n}}{4}}$$

となるため、関数 $f_n(x)$ の $x \geq 1$ における増減表は以下のようになる。

x	1	...	$e^{\frac{3n - \sqrt{n^2 + 8n}}{4}}$	...	e^n	...	$e^{\frac{3n + \sqrt{n^2 + 8n}}{4}}$	...
$f'_n(x)$	0	+	+	+	0	-	-	-
$f''_n(x)$	0	+	0	-	-	-	0	+
$f_n(x)$	0	↗	変曲点	↖	極大	↘	変曲点	↗

よって、 $f_n(x)$ は $x = e^n$ のとき最大値 $\frac{n^n}{e^n}$ をとり、変曲点の x 座標は $e^{\frac{3n \pm \sqrt{n^2 + 8n}}{4}}$ であることがわ

かる。また、 $x = e^n$ とおくと、 $x \rightarrow \infty$ のとき $t \rightarrow \infty$ であるから、

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(nt)^n}{e^{nt}} = \lim_{t \rightarrow \infty} n^n \left(\frac{t}{e^t} \right)^n = 0 \left(\because \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{e^t} = 0 \right)$$

とわかる。

$$(\text{答}) \quad f_n(x) \text{ の最大値: } \frac{n^n}{e^n}, \lim_{x \rightarrow \infty} f_n(x) = 0, \text{ 変曲点の } x \text{ 座標: } e^{\frac{3n \pm \sqrt{n^2 + 8n}}{4}}$$

(2)

点 $(a, f_{2k}(a))$ (ただし $a > 1$) における $y = f_{2k}(x)$ のグラフの接線の方程式は

$$y = f'_{2k}(a)(x - a) + f_{2k}(a)$$

と表せる。この接線が原点を通るための条件は、①を用いると

$$\begin{aligned} 0 &= f'_{2k}(a)(0 - a) + f_{2k}(a) \\ \Leftrightarrow \frac{(2k - \log a)(\log a)^{2k-1}}{a^2} \cdot (-a) + \frac{(\log a)^{2k}}{a} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{2(\log a - k)(\log a)^{2k-1}}{a} &= 0 \\ \therefore a = e^k \quad (\because a > 1) \end{aligned}$$

となるから、求める接線 ℓ の接点の座標 $(a, f_{2k}(a))$ は

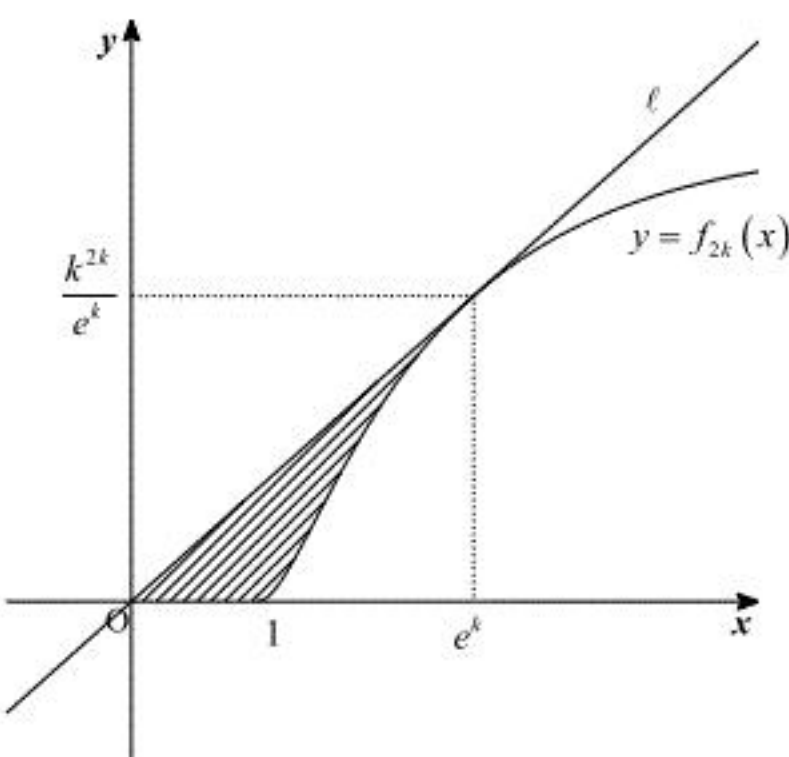
$$(e^k, f_{2k}(e^k)) = \left(e^k, \frac{k^{2k}}{e^k} \right)$$

であることがわかる。

$$(\text{答}) \quad \left(e^k, \frac{k^{2k}}{e^k} \right)$$

(3)

$y = f_{2k}(x)$ のグラフと(2)の接線 ℓ および x 軸によって囲まれた部分は、以下の図の斜線部のようになる。



(2)の結果より、 ℓ の傾きは $\frac{k^{2k}}{e^{2k}}$ であるから、 ℓ の方程式は

$$y = \frac{k^{2k}}{e^{2k}} x$$

である。ここで、 ℓ と $y = f_{2k}(x)$ との共有点を求める。2 式から y を消去すると

$$\frac{k^{2k}}{e^{2k}} x = \frac{(\log x)^{2k}}{x} \Leftrightarrow \frac{k^{2k}}{e^{2k}} = \frac{(\log x)^{2k}}{x^2} \quad \dots \textcircled{2}$$

となるが、

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{(\log x)^{2k}}{x^2} \right\}' &= \frac{2k(\log x)^{2k-1} \cdot \frac{1}{x} \cdot x^2 - (\log x)^{2k} \cdot 2x}{x^4} \\ &= \frac{2(k - \log x)(\log x)^{2k-1}}{x^3} \end{aligned}$$

より、②の右辺は $x \geq 1$ の範囲では $x < e^k$ のとき単調増加、 $e^k < x$ のとき単調減少するので、

②の解は $x = e^k$ のみである。すなわち、 ℓ と $f_n(x)$ の共有点は $\left(e^k, \frac{k^{2k}}{e^k} \right)$ のみである。また、

$$f_{2k}(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

に注意すると、求める面積は

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot e^k \cdot \frac{k^{2k}}{e^k} - \int_1^{e^k} f_{2k}(x) dx &= \frac{k^{2k}}{2} - \int_1^{e^k} (\log x)^{2k} \cdot (\log x)' dx \\ &= \frac{k^{2k}}{2} - \left[\frac{1}{2k+1} (\log x)^{2k+1} \right]_1^{e^k} \\ &= k^{2k} \left(\frac{1}{2} - \frac{k}{2k+1} \right) \\ &= \frac{k^{2k}}{4k+2} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{k^{2k}}{4k+2}$$