I

(1)

$$a_2 = ca_1 = ac$$
$$a_3 = c(a_1 + a_2) = c(a + ac) = ac(c+1)$$
$$a_4 = c(a_1 + a_2 + a_3) = c\{a + ac + ac(c+1)\} = ac(c+1)^2$$

である。

(答) $a_2 = ac,\ a_3 = ac(c+1),\ a_4 = ac(c+1)^2$

(2)

$n \geqq 2$ に対して,

$$a_n = ac(c+1)^{n-2} \qquad ・・・①$$

と推測できる。数学的帰納法を利用して, ①が成り立つことを示す。

[1] $n = 2$ のとき

$$a_2 = ac(c+1)^{2-2} = ac$$

より, 成り立つ。

[2] $n = k$ で成立していると仮定したとき

$n = k+1$ において

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= c\sum_{j=1}^{k} a_j \\ &= ca_k + c\sum_{j=1}^{k-1} a_j \\ &= ca_k + a_k \\ &= (c+1)a_k \\ &= ac(c+1)^{k-1} \end{aligned}$$

となり, $n = k+1$ のときも成り立つ。

以上[1], [2]より, $n \geqq 2$ を満たすすべての自然数 n について①が成り立つ。

(証明終)

(3)

c の値によって場合分けを行う。

[1] $c \neq -2$ のとき

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n}(-1)^j a_j &= -a + \sum_{j=2}^{n}(-1)^j \cdot ac(c+1)^{j-2} \\ &= -a + ac\sum_{j=2}^{n}(-c-1)^{j-2} \\ &= -a + ac\sum_{j=1}^{n-1}(-c-1)^{j-1} \\ &= -a + ac \cdot \frac{1-(-c-1)^{n-1}}{1-(-c-1)} \\ &= \frac{ac\{1-(-c-1)^{n-1}\}}{c+2} - a \end{aligned}$$

である。

[2] $c = -2$ のとき

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n}(-1)^j a_j &= -a + \sum_{j=2}^{n}(-1)^j \cdot a \cdot (-2) \cdot (-1)^{j-2} \\ &= -a - 2a\sum_{j=2}^{n}(-1)^{2j-2} \\ &= -a - 2a\sum_{j=2}^{n} 1 \\ &= -(2n-1)a \end{aligned}$$

である。

(答) $c \neq -2$ のとき $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}(-1)^j a_j = \frac{ac\{1-(-c-1)^{n-1}\}}{c+2} - a$

$c = -2$ のとき $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}(-1)^j a_j = -(2n-1)a$

Ⅱ

(1)

$f(x)>0$ であるから，$f(x)$ が最小になることと，$\{f(x)\}^2$ が最小になることは同値である。

$$h(x)=\{f(x)\}^2=\sum_{i=1}^{n}(x-a_i)^2$$

とすると，

$$h'(x)=2\sum_{i=1}^{n}(x-a_i)=2\left(nx-\sum_{i=1}^{n}a_i\right)$$

である。$h'(x)=0$ となる x を x_0 とすると，

$$nx_0-\sum_{i=1}^{n}a_i=0$$
$$\therefore x_0=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i$$

であり，増減表は以下のようになる。

x	$\cdots$	x_0	$\cdots$
$h'(x)$	$-$	0	$+$
$h(x)$	↘	最小	↗

したがって，$h(x)$ は $x=x_0$ のとき最小であり，求める x の値は，

$$x=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i$$

である。

（答）$x=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}a_i$

(2)

$x\geqq a_n$ のとき

$$g(x)=nx-\sum_{i=1}^{n}a_i$$

となり，これが最小となるのは $x=a_n$ のときである。また，$x\leqq a_1$ のとき

$$g(x)=-nx+\sum_{i=1}^{n}a_i$$

となり，これが最小となるのは $x=a_1$ のときである。よって，$g(x)=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}|x-a_i|$ を最小にする x は，

$$a_1\leqq x\leqq a_n$$

の範囲に存在することがわかる。x がこの範囲にあるとき，

$$\begin{aligned}g(x)&=(x-a_1)+(a_n-x)+\sum_{i=2}^{n-1}|x-a_i|\\&=\sum_{i=2}^{n-1}|x-a_i|+a_n-a_1\end{aligned}$$

と表されるので，$\displaystyle\sum_{i=2}^{n-1}|x-a_i|$ を最小にする x を考えればよい。上の議論と同様にして，そのような x が

$$a_2\leqq x\leqq a_{n-1}$$

に存在することがわかり，x がこの範囲にあるとき，

$$g(x)=\sum_{i=3}^{n-2}|x-a_i|+(a_n+a_{n-1})-(a_1+a_2)$$

と表せる。以降，同様に繰り返していけばよい。

[1] n が奇数のとき

先ほどの操作を繰り返すと，x が $a_{\frac{n-1}{2}}\leqq x\leqq a_{\frac{n+3}{2}}$ の範囲にあるとき

$$g(x)=\left|x-a_{\frac{n+1}{2}}\right|+\sum_{i=\frac{n+3}{2}}^{n}a_i-\sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}}a_i$$

と表せる。よって，

$$x=a_{\frac{n+1}{2}}$$

のとき，$g(x)$ は最小値をとり，その値は

$$g\left(a_{\frac{n+1}{2}}\right)=\sum_{i=\frac{n+3}{2}}^{n}a_i-\sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}}a_i$$

となる。

[2] n が偶数のとき

先ほどの操作を繰り返すと，x が $a_{\frac{n}{2}}\leqq x\leqq a_{\frac{n}{2}+1}$ の範囲にあるとき

$$g(x)=\sum_{i=\frac{n}{2}+1}^{n}a_i-\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}}a_i$$

となる。よって，$a_{\frac{n}{2}}\leqq m\leqq a_{\frac{n}{2}+1}$ を満たす実数を m とすると，$x=m$ のとき $g(x)$ は最小値をとり，その値は

$$g(m)=\sum_{i=\frac{n}{2}+1}^{n}a_i-\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}}a_i$$

となる。

以上[1], [2]より，$g(x)$ が最小となる x は n が奇数のとき $x=a_{\frac{n+1}{2}}$，n が偶数のとき $x=m\left(a_{\frac{n}{2}}\leqq m\leqq a_{\frac{n}{2}+1}\right)$ である。

$$（答）\begin{cases}x=a_{\frac{n+1}{2}} & (n\text{ が奇数のとき})\\ x=m\quad\left(a_{\frac{n}{2}}\leqq m\leqq a_{\frac{n}{2}+1}\right) & (n\text{ が偶数のとき})\end{cases}$$

Ⅲ

(1)

$$2x^2-3x=x(2x-3)$$
$$2x^2-5x+2=(x-2)(2x-1)$$

より，

$$|2x^2-3x|=\begin{cases}2x^2-3x & \left(x<0,\ \dfrac{3}{2}\leqq x\right)\\ -2x^2+3x & \left(0\leqq x<\dfrac{3}{2}\right)\end{cases}$$

$$|2x^2-5x+2|=\begin{cases}2x^2-5x+2 & \left(x<\dfrac{1}{2},\ 2\leqq x\right)\\ -2x^2+5x-2 & \left(\dfrac{1}{2}\leqq x<2\right)\end{cases}$$

であるから，

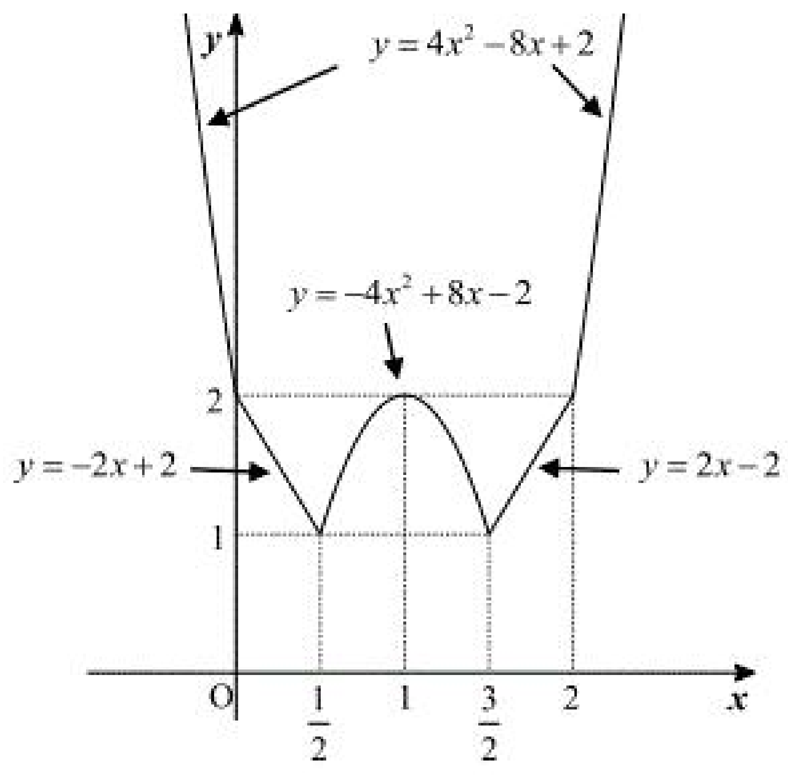
$$f(x)=\begin{cases}4x^2-8x+2 & (x<0)\\ -2x+2 & \left(0\leqq x<\dfrac{1}{2}\right)\\ -4x^2+8x-2 & \left(\dfrac{1}{2}\leqq x<\dfrac{3}{2}\right)\\ 2x-2 & \left(\dfrac{3}{2}\leqq x<2\right)\\ 4x^2-8x+2 & (x\geqq 2)\end{cases}$$

となる。

$$(\text{答})\ f(x)=\begin{cases}4x^2-8x+2 & (x<0)\\ -2x+2 & \left(0\leqq x<\dfrac{1}{2}\right)\\ -4x^2+8x-2 & \left(\dfrac{1}{2}\leqq x<\dfrac{3}{2}\right)\\ 2x-2 & \left(\dfrac{3}{2}\leqq x<2\right)\\ 4x^2-8x+2 & (x\geqq 2)\end{cases}$$

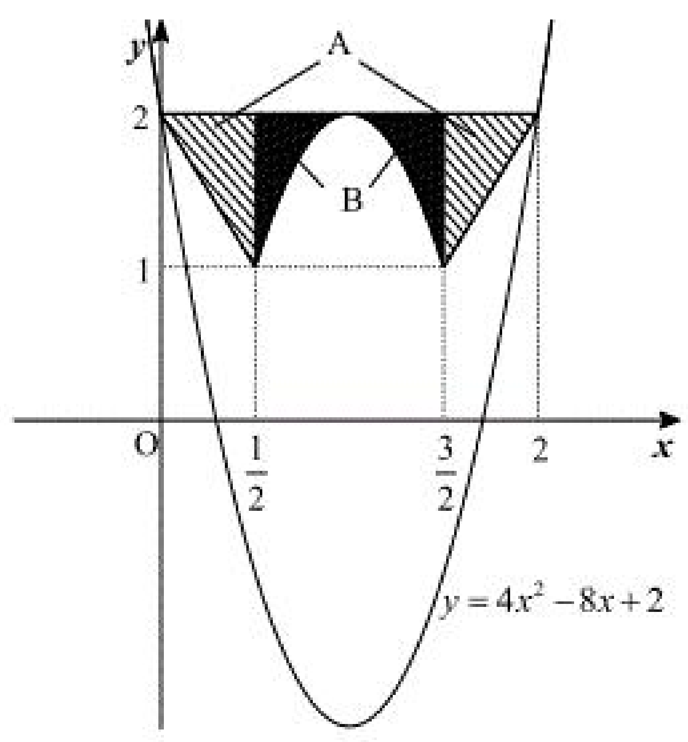
(2)

$-4x^2+8x-2=-4(x-1)^2+2$ であるから，放物線 $y=-4x^2+8x-2$ の頂点は $(1,2)$ である。同様に，放物線 $y=4x^2-8x+2$ の頂点は $(1,-2)$ である。よって，(1)の結果をもとにグラフをかくと以下のようになる。



(答) 前図

(3)



求める面積 S は，放物線 $y=4x^2-8x+2$ と直線 $y=2$ で囲まれる部分から，上図の A, B の部分を引いた領域の面積である。A, B の面積をそれぞれ S_A, S_B とすると，

$$S_A=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}$$

である。Bは直線 $x=\dfrac{1}{2}$, $x=\dfrac{3}{2}$ と直線 $y=1$, $y=2$ で囲まれた四角形から，放物線 $y=-4x^2+8x-2$ と直線 $y=1$ で囲まれた部分を引けばよいから，

$$\begin{aligned}S_B&=1\cdot 1-\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\left\{\left(-4x^2+8x-2\right)-1\right\}dx\\&=1+4\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{3}{2}\right)dx\\&=1+4\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)\cdot\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\right)^3\\&=\frac{1}{3}\end{aligned}$$

である。したがって，

$$\begin{aligned}S&=\int_0^2\left\{2-\left(4x^2-8x+2\right)\right\}dx-S_A-S_B\\&=-4\int_0^2 x(x-2)\,dx-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\\&=-4\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)\cdot 2^3-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\\&=\frac{9}{2}\end{aligned}$$

と求まる。

(答) $S=\dfrac{9}{2}$