2016 年度入学試験問題

数　　学

（試験時間　14：50～15：50　60 分）

1．この冊子は，出願時に選択した科目の問題冊子です。科目名を確認のうえ，解答してください。

2．解答用紙は，記述解答用紙のみです。

3．解答は，必ず解答欄に記入してください。解答欄以外に書くと無効となりますので注意してください。

4．解答は，ＨＢの鉛筆またはシャープペンシルを使用し，訂正する場合は，プラスチック製の消しゴムを使用してください。

5．解答用紙には，受験番号と氏名を必ず記入してください。

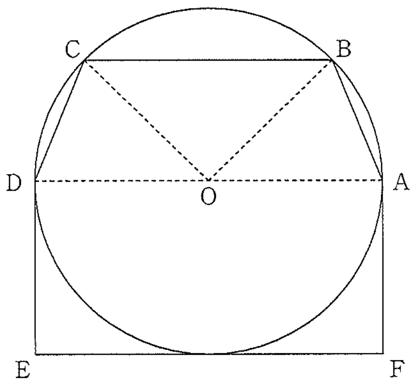
(設問は２ページより始まる。)

I　図のように，点 O を中心とする半径 1 の円周上に A, B, C, D の 4 点，円の外側に E, F の 2 点をとる。ただし，線分 AD は円の直径，$\angle \mathrm{BOA} = \angle \mathrm{COD} = 45^\circ$ とする。また，ADEF は長方形で，線分 EF は円と接し，$\mathrm{EF} = 2$, $\mathrm{AF} = \mathrm{DE} = 1$ とする。いま，A, B, C, D, E, F と書いた玉を壺に入れて，一つ取り出してもとに戻す。この操作を n 回繰り返し，i 回目に取り出した玉に書かれた文字を R_i とする。例えば，1 回目に取り出した玉に書かれた文字が A であれば，$\mathrm{R}_1 = \mathrm{A}$ とする。以下の問に答えよ。(30 点)

(1) 2 つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の内積 $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ と，線分 AB の長さを求めよ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OR_1}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OR_2}}$ の内積が $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ となる確率を求めよ。

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OR}_i}$ の内積を p_i とする。このとき，$p_1, p_2, \ldots, p_n$ の値の積 $p_1 p_2 \cdots p_n$ が 0 となる確率を求めよ。



（設問は次のページにつづく）

II　n を自然数とするとき，以下の問に答えよ。(30 点)

(1) 1 から $2n-1$ までのすべての奇数の和

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)$$

を求めよ。

(2) 次の等式を数学的帰納法によって証明せよ。

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

(3) 1 から $2n-1$ までのすべての奇数の 3 乗の和

$$1^3+3^3+5^3+\cdots+(2n-1)^3$$

を求めよ。ただし，もし必要ならば，以下の等式を用いてよい。

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

（設問は次のページにつづく）

III　a を定数とする。座標平面で，方程式 $(x-a)^2+y^2=1$ が表す円を C とする。また，方程式 $x=0$ が表す直線を L_1 とし, 方程式 $y=x-1$ が表す直線を L_2 とする。以下の問に答えよ。(40 点)

(1) 円 C が 2 直線 L_1, L_2 の両方と共有点をもつとき，定数 a の値の範囲を求めよ。

(2) 直線 L_1 のうち円 C が切り取る線分の長さを l_1 とし，直線 L_2 のうち円 C が切り取る線分の長さを l_2 とする。a が (1) で求めた範囲を動くとき，l_1, l_2 をそれぞれ a を用いて表せ。

(3) a が (1) で求めた範囲を動くとき，$l_1^2+l_2^2$ の最大値と，そのときの a の値を求めよ。

（以下計算用紙）