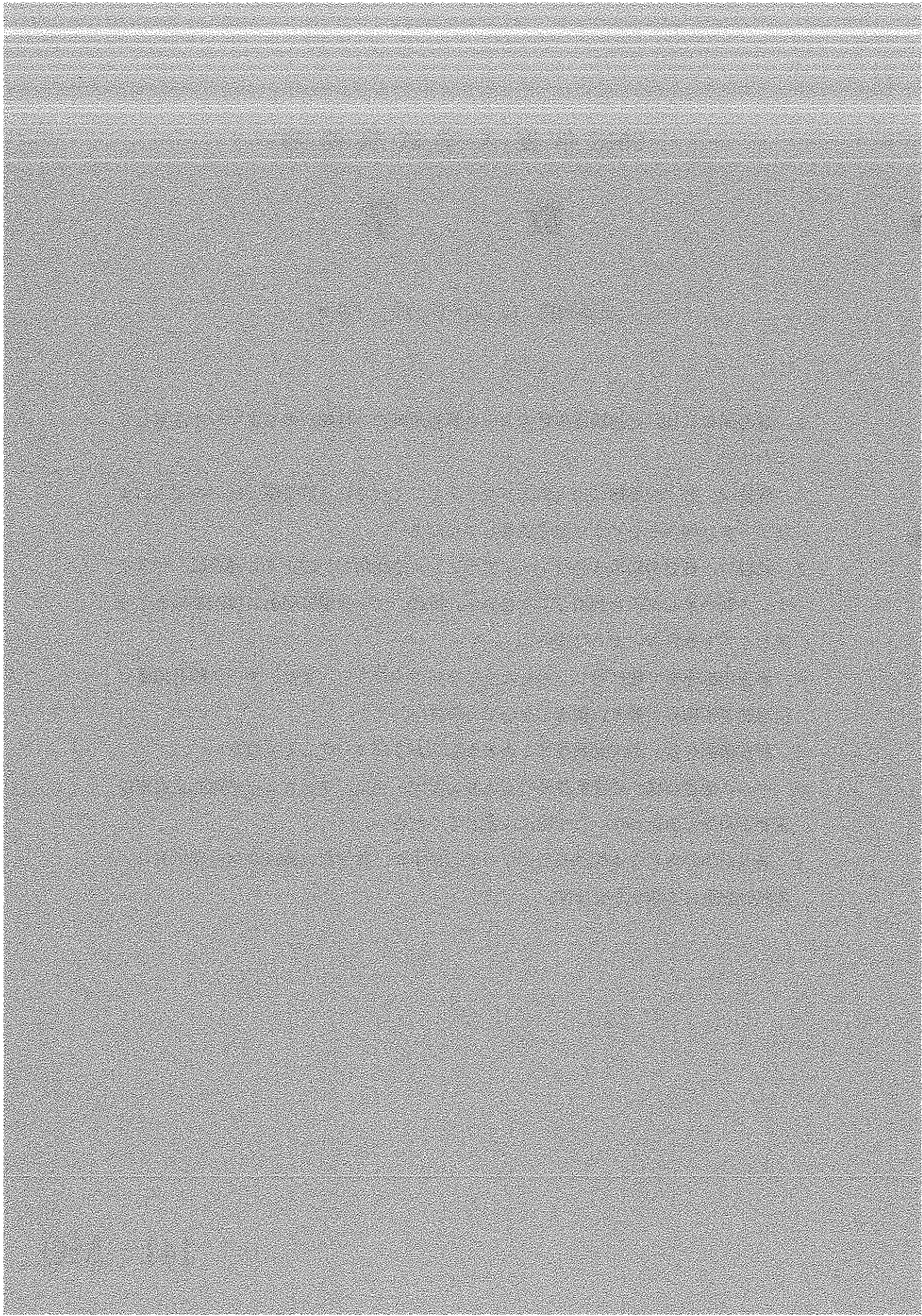


2016 年度 入 学 試 験 問 題

数 学

(試験時間 15:20～17:00 100 分)

1. 解答用紙には、記述解答用紙とマーク解答用紙の2種類がありますので注意してください。
2. 解答は、必ず解答欄に記入およびマークしてください。解答欄以外への記入およびマークは無効となりますので注意してください。
3. 解答は、HBの鉛筆またはシャープペンシルを使用し、訂正する場合は、プラスチック製の消しゴムを使用してください。特に、マーク解答用紙には鉛筆のあとや消しくずを残さないでください。
4. 解答用紙を折り曲げたり、汚したりしないでください。また、マーク解答用紙を記述解答用紙の下敷きに使用しないでください。
5. 解答用紙には、必ず受験番号と氏名を記入およびマークしてください。
6. マーク解答用紙への受験番号の記入およびマークは、コンピュータ処理上非常に重要なので、誤記のないよう特に注意してください。
7. 満点が100点となる配点表示になっていますが、数学科は満点が200点であり、各問の配点は2倍となります。



(設問は 2 ページより始まる。)

- I 次の問題文の空欄にもっとも適する答えを解答群から選び、その記号をマーク解答用紙にマークせよ。ただし、同じ記号を2度以上用いてもよい。(20点)

曲線 $C: y = \frac{2}{x^3}$ の上に点の列 $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), \dots, P_n(x_n, y_n), \dots$ をとる。ただし、 $x_1 = 1$ かつ $0 < x_{n+1} < x_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) とする。O を原点とし、線分 OP_n, OP_{n+1} と曲線 C で囲まれた部分の面積を S_n とする。 S_n を x_n と x_{n+1} で表すと ア である。

さて、初項1, 公比 $\frac{2}{3}$ の等比数列の第 n 項までの和 T_n は イ である。いま、 P_n における C の接線と x 軸との交点の x 座標 r_n が

$$r_n T_n = \frac{4}{3}$$

を満たすとする。このとき、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \text{ウ}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n S_k = \text{エ}$$

である。

問題 I のアの解答群

- (a) $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n} \right)$ (b) $\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n}$ (c) $\frac{3}{2} \left(\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n} \right)$
 (d) $2 \left(\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n} \right)$ (e) $3 \left(\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n} \right)$ (f) $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{x_{n+1}^2} - \frac{1}{x_n^2} \right)$
 (g) $\frac{1}{x_{n+1}^2} - \frac{1}{x_n^2}$ (h) $\frac{3}{2} \left(\frac{1}{x_{n+1}^2} - \frac{1}{x_n^2} \right)$ (i) $2 \left(\frac{1}{x_{n+1}^2} - \frac{1}{x_n^2} \right)$
 (j) $3 \left(\frac{1}{x_{n+1}^2} - \frac{1}{x_n^2} \right)$

問題 I の イ の解答群

- Ⓐ $\frac{1}{3} \left\{ 1 - \left(\frac{2}{3} \right)^{n-1} \right\}$ Ⓑ $\frac{1}{3} \left\{ 1 - \left(\frac{2}{3} \right)^n \right\}$ Ⓒ $\frac{1}{3} \left\{ 1 - \left(\frac{2}{3} \right)^{n+1} \right\}$
Ⓓ $3 \left\{ 1 - \left(\frac{2}{3} \right)^{n-1} \right\}$ Ⓔ $3 \left\{ 1 - \left(\frac{2}{3} \right)^n \right\}$ Ⓕ $3 \left\{ 1 - \left(\frac{2}{3} \right)^{n+1} \right\}$

問題 I の ウ, エ の解答群

- Ⓐ $\frac{1}{3}$ Ⓑ $\frac{9}{16}$ Ⓒ $\frac{2}{3}$ Ⓓ $\frac{3}{4}$ Ⓔ 1 Ⓕ $\frac{4}{3}$ Ⓖ $\frac{16}{9}$
Ⓗ 2 Ⓙ $\frac{8}{3}$ Ⓚ 3 Ⓛ 4 Ⓜ 6 Ⓨ 8 Ⓝ 12
Ⓞ 16 Ⓟ $\frac{64}{3}$ Ⓠ 24

(設問は次のページにつづく)

II 次の問題文の空欄にもっとも適する答えを解答群から選び、その記号をマーク解答用紙にマークせよ。ただし、同じ記号を2度以上用いてもよい。(20点)

点 $P(t, t^2)$ における放物線 $y = x^2$ の接線を ℓ とすると、 ℓ の方程式は $y =$ オ である。 t が $0 \leq t \leq 1$ の範囲を動くときに ℓ が通過する領域を D とする。 D を図示するには、 x を固定して $y =$ オ を t の関数とみなし、 $0 \leq t \leq 1$ のときに y のとりうる値の範囲を調べればよい。すると、

$$x \leq 0 \text{ のとき} \quad \text{カ} \leq y \leq \text{キ},$$

$$0 \leq x \leq \frac{1}{2} \text{ のとき} \quad \text{カ} \leq y \leq \text{ク},$$

$$\frac{1}{2} \leq x \leq 1 \text{ のとき} \quad \text{キ} \leq y \leq \text{ク},$$

$$1 \leq x \text{ のとき} \quad \text{キ} \leq y \leq \text{カ}$$

である。

次に、 a を定数とし、点 $(0, a)$ を A とする。点 Q が領域 D 上を動くとき、線分 AQ の長さの最小値は

$$a \leq -1 \text{ のとき} \quad \text{ケ},$$

$$-1 \leq a \leq 0 \text{ のとき} \quad 0,$$

$$0 \leq a \leq \frac{1}{2} \text{ のとき} \quad \text{コ},$$

$$\frac{1}{2} \leq a \leq \frac{3}{2} \text{ のとき} \quad \text{サ},$$

$$\frac{3}{2} \leq a \text{ のとき} \quad \text{シ}$$

である。

問題 II のオの解答群

- (a) $tx - t^2$ (b) $tx - 2t^2$ (c) $tx - 3t^2$ (d) $2tx - t^2$
(e) $2tx - 2t^2$ (f) $2tx - 3t^2$

問題 II のカ、キ、クの解答群

- (a) -2 (b) -1 (c) 0 (d) 1 (e) 2
(f) $x - 1$ (g) $x - 2$ (h) $x - 3$ (i) $2x - 1$ (j) $2x - 2$
(k) $2x - 3$ (l) $x^2 - 1$ (m) x^2 (n) $x^2 + 1$ (o) $2x^2 - 1$
(p) $2x^2$ (q) $2x^2 + 1$

問題 II のケ、コ、サ、シの解答群

- (a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (c) 1 (d) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ (e) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$
(f) $-\frac{a+1}{\sqrt{5}}$ (g) $\frac{a+1}{\sqrt{5}}$ (h) $-\frac{a+1}{\sqrt{3}}$ (i) $\frac{a+1}{\sqrt{3}}$ (j) $-a$
(k) a (l) $-2a$ (m) $2a$ (n) $\sqrt{a - \frac{1}{4}}$ (o) $\sqrt{a + \frac{1}{4}}$
(p) $\sqrt{a^2 - 2a + 2}$

(設問は次のページにつづく)

III xy 平面において、定点 $A(a, b)$ ($a, b > 0$) を通り、傾き $m = -\tan \theta$ ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) の直線を ℓ とする。この直線 ℓ が x 軸と交わる点を P とし、 y 軸と交わる点を Q とする。(30 点)

- (1) 線分 AP 、線分 AQ および線分 PQ の長さを θ, a, b で表せ。
- (2) 線分 PQ の長さ $L(\theta)$ を最小とする θ に対して、 $\tan \theta$ の値を a と b で表せ。
またこのときの $L(\theta)$ の値を a と b で表せ。

xy 平面上に、 $O(0, 0)$, $B(135, 0)$, $C(135, 320)$, $D(0, 320)$ の 4 点を頂点とする長方形 $OBCD$ をとる。定点 A として、この長方形の内部の点 $(27, 64)$ をとる。このとき、点 A を通る直線 k と長方形 $OBCD$ の共通部分の長さを K とする。(1), (2) の考察を利用して、直線 k の傾き m が変化するときの K の最小値を求めよう。

- (3) 直線 k が辺 OB と辺 OD の両方と交わるとき、 m がとりうる値の範囲を求めよ。またこのとき、 K の最小値 M を求めよ。
- (4) 直線 k の傾き $m = -\tan \theta$ を $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ の範囲で動かしても、 K の値は (3) で求めた M 以上であることを示せ。

(設問は次のページにつづく)

IV n を 2 以上の整数とし, $x \geq 1$ の範囲で $f_n(x) = \frac{(\log x)^n}{x}$ とする。(30 点)

- (1) $f_n(x)$ の最大値および $\lim_{x \rightarrow \infty} f_n(x)$ を求めよ。また, $y = f_n(x)$ のグラフの変曲点の x 座標を求めよ。必要ならば $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{e^t} = 0$ を用いてよい。
- (2) k を正の整数とする。点 $(a, f_{2k}(a))$ (ただし $a > 1$) における $y = f_{2k}(x)$ のグラフの接線 ℓ は原点を通るとする。接点の座標 $(a, f_{2k}(a))$ を k で表せ。
- (3) $y = f_{2k}(x)$ のグラフと (2) の接線 ℓ および x 軸によって囲まれた部分の面積を求めよ。

(計算用紙)

