

〔解答〕

ア	イ	ウ	エ	オ	カ
a	c	g	d	c	g

〔解説〕

$$\beta^3 = \alpha, \gamma^3 = \alpha$$

であるから、整数 k, l を用いて、

$$\arg \beta = \frac{\theta + 2k\pi}{3}, \arg \gamma = \frac{\theta + 2l\pi}{3}$$

と表すことが出来る。また、

$$0 \leq \arg \beta < \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3} \leq \arg \gamma < 2\pi$$

であるから、これを満たす k, l は $k=0, l=2$ であり、

$$\arg \beta = \frac{\theta}{3}, \arg \gamma = \frac{\theta + 4\pi}{3}$$

となる。 $|\beta|=1, |\gamma|=1$ であるから、 β, γ を極形式で表すと、

$$\begin{aligned}\beta &= \cos \frac{\theta}{3} + i \sin \frac{\theta}{3} \\ \gamma &= \cos \frac{\theta + 4\pi}{3} + i \sin \frac{\theta + 4\pi}{3}\end{aligned}$$

となる。ここで、 $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}$ より、

$$\arg \alpha = \theta > \frac{\theta}{3} = \arg \beta$$

$$\arg \gamma = \frac{\theta + 4\pi}{3} \geq \frac{\frac{\pi}{2} + 4\pi}{3} = \frac{3\pi}{2} \geq \theta = \arg \alpha$$

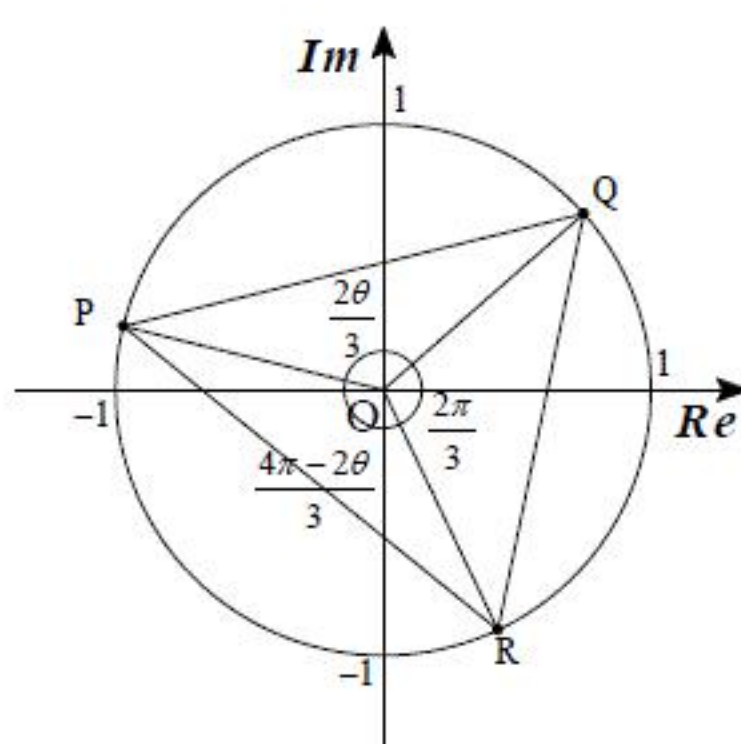
となるから、

$$0 < \arg \beta < \arg \alpha < \arg \gamma < 2\pi$$

を満たす。よって、

$$\angle QOP = \frac{2\theta}{3}, \angle POR = \frac{4\pi - 2\theta}{3}, \angle ROQ = \frac{2\pi}{3}$$

となり、3点 P, Q, R の位置関係は以下の図のようになる。



$\triangle PQR$ の面積 S は $\triangle QOP$ 、 $\triangle POR$ 、 $\triangle ROQ$ の面積の和であるから、加法定理より、

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin \frac{2\theta}{3} + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin \frac{4\pi - 2\theta}{3} + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin \frac{2\pi}{3} \\ &= \frac{1}{2} \sin \frac{2\theta}{3} + \frac{1}{2} \sin \frac{4\pi - 2\theta}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4} \\ &= \frac{1}{2} \sin \frac{2\theta}{3} + \frac{1}{2} \left(\sin \frac{4\pi}{3} \cos \frac{2\theta}{3} - \cos \frac{4\pi}{3} \sin \frac{2\theta}{3} \right) + \frac{\sqrt{3}}{4} \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{4} \cos \frac{2\theta}{3} + \frac{3}{4} \sin \frac{2\theta}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}\end{aligned}$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned}S &= \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin \frac{2\theta}{3} - \frac{1}{2} \cos \frac{2\theta}{3} \right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\sin \frac{2\theta}{3} \cos \frac{\pi}{6} - \cos \frac{2\theta}{3} \sin \frac{\pi}{6} \right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \left(\frac{2\theta}{3} - \frac{\pi}{6} \right)\end{aligned}$$

である。よって、 $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}$ の範囲において、

$$\frac{\pi}{6} \leq \frac{2\theta}{3} - \frac{\pi}{6} \leq \frac{5\pi}{6}$$

となり、最小値をとるのは、

$$\begin{aligned}\frac{2\theta}{3} - \frac{\pi}{6} &= \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \\ \Leftrightarrow \theta &= \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\end{aligned}$$

のときであり、最小値は

$$\begin{aligned}S &= \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \frac{\pi}{6} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

となる。最大値をとるのは、

$$\begin{aligned}\frac{2\theta}{3} - \frac{\pi}{6} &= \frac{\pi}{2} \\ \Leftrightarrow \theta &= \pi\end{aligned}$$

のときであり、最大値は

$$\begin{aligned}S &= \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{4}\end{aligned}$$

となる。

【解答】

キ	ク	ケ	コ	サ	シ	ス
j	m	g	h	b	g	d

【解説】

n を自然数として、 $2(n-1)\pi < x \leq 2n\pi$ の範囲において、

$$F'(x) = e^{-ax} \sin x$$

$$F'(x) = 0 \Rightarrow x = (2n-1)\pi, 2n\pi$$

より、 $F(x)$ の増減は次表のようになる。

x	$2(n-1)\pi$	$\cdots$	$(2n-1)\pi$	$\cdots$	$2n\pi$
$F'(x)$		$+$	0	$-$	0
$F(x)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$	

同様に、 $2n\pi < x < (2n+1)\pi$ において $F'(x) > 0$ となる。したがって、 $F(x)$ が極大となるのは $x = (2n-1)\pi$ のとき、極小となるのは $x = 2n\pi$ のときである。このとき、増減表より、

$$\min\{F(2(n-1)\pi), F(2n\pi)\} \leq F(x) \leq F((2n-1)\pi) \qquad \cdots \textcircled{1}$$

が成り立つ。

$F(\pi)$ に対して部分積分を行うと

$$\begin{aligned} F(\pi) &= \int_0^\pi e^{-at} \sin t dt \\ &= \int_0^\pi \left(-\frac{1}{a} \cdot e^{-at} \right)' \sin t dt \\ &= \left[-\frac{1}{a} e^{-at} \sin t \right]_0^\pi + \int_0^\pi \frac{e^{-at} \cos t}{a} dt \\ &= \int_0^\pi \frac{e^{-at} \cos t}{a} dt \end{aligned}$$

となり、もう一度部分積分を行うと

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \frac{e^{-at} \cos t}{a} dt &= \int_0^\pi \left(-\frac{1}{a^2} \cdot e^{-at} \right)' \cos t dt \\ &= \left[-\frac{e^{-at} \cos t}{a^2} \right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{1}{a^2} e^{-at} \sin t dt \end{aligned}$$

となるから、

$$\begin{aligned} F(\pi) &= \left[-\frac{e^{-at} \cos t}{a^2} \right]_0^\pi - \frac{1}{a^2} F(\pi) \\ \Leftrightarrow \left(1 + \frac{1}{a^2} \right) F(\pi) &= \frac{e^{-a\pi} + 1}{a^2} \\ \Leftrightarrow F(\pi) &= \frac{e^{-a\pi} + 1}{a^2 + 1} \end{aligned}$$

となる。

自然数 n に対して

$$S_n = F(n\pi), \quad S_0 = F(0) = 0$$

とおくとき、

$$\begin{aligned} S_{n+1} - S_n &= \int_0^{(n+1)\pi} e^{-at} \sin t dt - \int_0^{n\pi} e^{-at} \sin t dt \\ &= \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-at} \sin t dt \end{aligned}$$

となる。 $t - \pi = s$ とすると、 $dt = ds$ であり、 t と s は次のように対応する。

t	$n\pi$	$\rightarrow$	$(n+1)\pi$
s	$(n-1)\pi$	$\rightarrow$	$n\pi$

よって、

$$\begin{aligned} S_{n+1} - S_n &= \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} e^{-a(s+\pi)} \sin(s+\pi) ds \\ &= -e^{-a\pi} \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} e^{-as} \sin s ds \\ &= -e^{-a\pi} \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} e^{-at} \sin t dt \\ &= -e^{-a\pi} \left\{ \int_0^{n\pi} e^{-at} \sin t dt - \int_0^{(n-1)\pi} e^{-at} \sin t dt \right\} \\ &= -e^{-a\pi} (S_n - S_{n-1}) \end{aligned}$$

となるため、

$$\begin{aligned} S_{n+1} - S_n &= (-e^{-a\pi})^n (S_1 - S_0) \\ &= (-e^{-a\pi})^n \left(\frac{e^{-a\pi} + 1}{a^2 + 1} - 0 \right) \\ &= (-e^{-a\pi})^n \frac{e^{-a\pi} + 1}{a^2 + 1} \end{aligned}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n (S_{k+1} - S_k) &= \sum_{k=0}^n \left\{ (-e^{-a\pi})^k \frac{e^{-a\pi} + 1}{a^2 + 1} \right\} \\ \Leftrightarrow S_{n+1} - S_0 &= \frac{e^{-a\pi} + 1}{a^2 + 1} \cdot \frac{1 - (-e^{-a\pi})^{n+1}}{1 + e^{-a\pi}} \\ \Leftrightarrow S_{n+1} &= \frac{1 - (-e^{-a\pi})^{n+1}}{a^2 + 1} \quad (n \geq 0) \end{aligned}$$

となり、これは $n = -1$ としても成り立つから、

$$S_n = \frac{1 - (-e^{-a\pi})^n}{a^2 + 1}$$

となり、これは 0 以上の整数 n に対して成り立つ。また、

$$a > 0 \Rightarrow 0 < e^{-a\pi} < 1$$

であるから、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{a^2 + 1}$$

となる。ここで①式より、 $2(n-1)\pi < x \leq 2n\pi$ において

$$\min\{S_{2(n-1)}, S_{2n}\} \leq F(x) \leq S_{2n-1}$$

が成り立つが、

$$\begin{aligned} S_{2(n-1)} &= \frac{1 - (-e^{-a\pi})^{2(n-1)}}{a^2 + 1} \\ S_{2n} &= \frac{1 - (-e^{-a\pi})^{2n}}{a^2 + 1} \end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned} S_{2n} - S_{2(n-1)} &= \frac{(-e^{-a\pi})^{2(n-1)} - (-e^{-a\pi})^{2n}}{a^2 + 1} \\ &= \frac{e^{-2a\pi} (e^{2a\pi} - 1)}{a^2 + 1} > 0 \quad (\because 2a\pi > 0) \end{aligned}$$

となるから、 $2(n-1)\pi < x \leq 2n\pi$ において、

$$S_{2(n-1)} < F(x) \leq S_{2n-1}$$

が成り立つ。 $x \rightarrow \infty$ のとき $n \rightarrow \infty$ となるから、はさみうちの原理より

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{a^2 + 1}$$

となる。

Ⅲ

(1)

点と直線の距離の公式より、直線 $y = kx \Leftrightarrow kx - y = 0$ と 3 点 A, B, C との距離 a, b, c は、

$$\begin{aligned} a &= \frac{|k \cdot 1 - 0|}{\sqrt{k^2 + (-1)^2}} = \frac{|k|}{\sqrt{k^2 + 1}} \\ b &= \frac{|k \cdot 2 - 1|}{\sqrt{k^2 + (-1)^2}} = \frac{|2k - 1|}{\sqrt{k^2 + 1}} \\ c &= \frac{|k \cdot (-1) - 3|}{\sqrt{k^2 + (-1)^2}} = \frac{|k + 3|}{\sqrt{k^2 + 1}} \end{aligned}$$

と表すことができるので、

$$\begin{aligned} F &= a^2 + b^2 + c^2 \\ &= \frac{1}{k^2 + 1} \{k^2 + (2k - 1)^2 + (k + 3)^2\} \\ &= \frac{6k^2 + 2k + 10}{k^2 + 1} \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad F = \frac{6k^2 + 2k + 10}{k^2 + 1}$$

(2)

$$\begin{aligned} F &= 2 \cdot \frac{3k^2 + k + 5}{k^2 + 1} \\ \frac{dF}{dk} &= 2 \cdot \frac{(6k + 1)(k^2 + 1) - (3k^2 + k + 5) \cdot 2k}{(k^2 + 1)^2} \\ &= 2 \cdot \frac{-k^2 - 4k + 1}{(k^2 + 1)^2} \\ &= -2 \cdot \frac{\{k - (-2 - \sqrt{5})\} \{k - (-2 + \sqrt{5})\}}{(k^2 + 1)^2} \end{aligned}$$

であるから、増減表は以下のようになる。

k	...	$-2 - \sqrt{5}$	...	$-2 + \sqrt{5}$	...
$\frac{dF}{dk}$	-	0	+	0	-
F	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

ここで、 $k \neq 0$ のとき

$$F = 2 \cdot \frac{3 + \frac{1}{k} + \frac{5}{k^2}}{1 + \frac{1}{k^2}}$$

より、

$$\lim_{k \rightarrow -\infty} F = \lim_{k \rightarrow \infty} F = 6$$

であるから、 F は $k = -2 - \sqrt{5}$ のとき最小値をとり、 $k = -2 + \sqrt{5}$ のとき最大値をとることがわかる。したがって、

$$m = -2 - \sqrt{5}, M = -2 + \sqrt{5}$$

である。

$$(\text{答}) \quad m = -2 - \sqrt{5}, M = -2 + \sqrt{5}$$

(3)

A(1, 0), B(2, 1), C(-1, 3) であるから、

$$\begin{aligned} A' &(1^2 - 0^2, 2 \cdot 1 \cdot 0) = (1, 0) \\ B' &(2^2 - 1^2, 2 \cdot 2 \cdot 1) = (3, 4) \\ C' &((-1)^2 - 3^2, 2 \cdot (-1) \cdot 3) = (-8, -6) \end{aligned}$$

である。したがって、 $\triangle A'B'C'$ の重心 H の座標は、

$$H \left(\frac{1+3-8}{3}, \frac{0+4-6}{3} \right) = \left(-\frac{4}{3}, -\frac{2}{3} \right)$$

となるから、直線 OH の方程式は $y = \frac{1}{2}x$ となる。ここで、点 P が直線 $y = px$ 上にあるとき、

$P(t, pt)$ と表すことができ、点 P' は

$$P' \left(t^2 - (pt)^2, 2 \cdot t \cdot pt \right) = \left((1 - p^2)t^2, 2pt^2 \right)$$

となる。 $p = m, M$ のとき、(2)より $k = p$ は $-k^2 - 4k + 1 = 0$ の解であるから、

$$\begin{aligned} -p^2 - 4p + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow p^2 &= -4p + 1 \end{aligned}$$

が成り立つ。よって、

$$\frac{1}{2}(1 - p^2)t^2 = \frac{1}{2}\{1 - (-4p + 1)\}t^2 = 2pt^2$$

となり、点 P' が直線 OH 上にあることがわかる。

(証明終)

IV

(1)

点Pの x 座標を p とおく。 $p \geq 1$ であることに注意すると、

$$(ax^3)' = 3ax^2$$

$$(x \log x)' = x \cdot \frac{1}{x} + 1 \cdot \log x = 1 + \log x$$

である。よって、2つの曲線 C_1, C_2 が点Pを共有し、Pにおけるそれぞれの接線が一致しているから、

$$\begin{cases} ap^3 = p \log p \\ 3ap^2 = 1 + \log p \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{\log p}{p^2} \\ 3 \log p = 1 + \log p \end{cases} \quad (\because p \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{\log p}{p^2} \\ \log p = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} p = \sqrt{e} \\ a = \frac{1}{2e} \end{cases}$$

となる。また、

$$\sqrt{e} \log \sqrt{e} = \frac{\sqrt{e}}{2}$$

より、 $P\left(\sqrt{e}, \frac{\sqrt{e}}{2}\right)$ である。

$$(\text{答}) \quad P\left(\sqrt{e}, \frac{\sqrt{e}}{2}\right), a = \frac{1}{2e}$$

(2)

$x \geq 1$ の範囲で考えればよい。このとき、(1)の結果より $C_1: y = \frac{x^3}{2e}$ であるから、曲線 C_1 と C_2 の

共有点の x 座標は

$$\frac{x^3}{2e} = x \log x$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{2e} - \log x = 0 \quad (\because x \neq 0)$$

を満たす。ここで、

$$f(x) = \frac{x^2}{2e} - \log x$$

とおくと、

$$f'(x) = \frac{x}{e} - \frac{1}{x} = \frac{1}{ex}(x - \sqrt{e})(x + \sqrt{e})$$

より、 $x \geq 1$ における $f(x)$ の増減は次表のようになる。

x	1	...	$\sqrt{e}$	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$	$\frac{1}{2e}$	$\searrow$	0	$\nearrow$

よって $f(x) = 0$ を満たすのは $x = \sqrt{e}$ のときのみであるから、曲線 C_1 と C_2 はP以外に共有点をもたない。

(証明終)

(3)

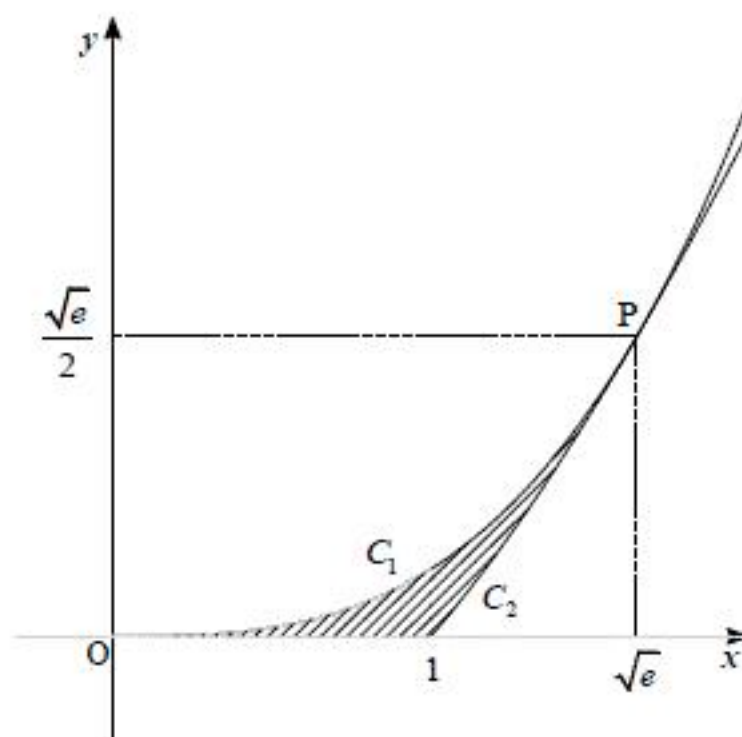
(2)の結果より、

$$f(x) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow xf(x) \geq 0 \quad (\because x \geq 1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^3}{2e} \geq x \log x$$

であるから、曲線 C_1 は常に C_2 の上側にある。よって、曲線 C_1 と C_2 の位置関係は以下のようになり、 S は斜線部の面積である。



したがって、

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\sqrt{e}} \frac{x^3}{2e} dx - \int_1^{\sqrt{e}} x \log x dx \\ &= \left[\frac{x^4}{8e} \right]_0^{\sqrt{e}} - \int_1^{\sqrt{e}} \left(\frac{x^2}{2} \right)' \log x dx \\ &= \frac{e}{8} - \left[\frac{x^2}{2} \log x \right]_1^{\sqrt{e}} + \int_1^{\sqrt{e}} \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{e}{8} - \frac{e}{4} + \left[\frac{x^2}{4} \right]_1^{\sqrt{e}} \\ &= \frac{e-2}{8} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad S = \frac{e-2}{8}$$