2017 年度入学試験問題

数　学

（試験時間　15：20～17：00　100 分）

1．解答用紙には，記述解答用紙とマーク解答用紙の 2 種類がありますので注意してください。

2．解答は，必ず解答欄に記入およびマークしてください。解答欄以外への記入およびマークは無効となりますので注意してください。

3．解答は，HBの鉛筆またはシャープペンシルを使用し，訂正する場合は，プラスチック製の消しゴムを使用してください。特に，マーク解答用紙には鉛筆のあとや消しくずを残さないでください。

4．解答用紙を折り曲げたり，汚したりしないでください。また，マーク解答用紙を記述解答用紙の下敷きに使用しないでください。

5．解答用紙には，必ず受験番号と氏名を記入およびマークしてください。

6．マーク解答用紙への受験番号の記入およびマークは，コンピュータ処理上非常に重要なので，誤記のないよう特に注意してください。

7．満点が 100 点となる配点表示になっていますが，数学科は満点が 200 点であり，各問の配点は 2 倍となります。

I　次の問題文の空欄にもっとも適する答えを解答群から選び，その記号をマーク解答用紙にマークせよ。ただし，同じ記号を2度以上用いてもよい。(20点)

複素数平面上の点 P(α) が，原点 O(0) を中心とする半径1の円 C 上にある。α の偏角を θ とし，$\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{3\pi}{2}$ であるとする。また，点 Q(β)，点 R(γ) はそれぞれ

$$\beta^3 = \alpha, \qquad 0 \leqq \arg\beta < \frac{2\pi}{3}$$
$$\gamma^3 = \alpha, \qquad \frac{4\pi}{3} \leqq \arg\gamma < 2\pi$$

をみたす点であるとする。

複素数 β，γ の絶対値はどちらも1だから，点 Q，R は円 C 上の点である。さらに β，γ の偏角はそれぞれ $\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イ}}$ である。よって β，γ を極形式で表すと

$$\beta = \cos\boxed{\text{ア}} + i\sin\boxed{\text{ア}}$$
$$\gamma = \cos\boxed{\text{イ}} + i\sin\boxed{\text{イ}}$$

となる。$\triangle$PQR の面積 S を θ で表すと

$$S = \boxed{\text{ウ}} + \frac{\sqrt{3}}{4}$$

である。

θ を $\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{3\pi}{2}$ の範囲で動かすとき，S は，$\theta = \dfrac{\pi}{2}$ または $\theta = \dfrac{3\pi}{2}$ で最小値 $\boxed{\text{エ}}$ をとり，$\theta = \boxed{\text{オ}}$ で最大値 $\boxed{\text{カ}}$ をとる。

問題Ⅰのア，イの解答群

ⓐ $\dfrac{\theta}{3}$　ⓑ $\dfrac{\theta+\pi}{3}$　ⓒ $\dfrac{\theta+4\pi}{3}$　ⓓ $\dfrac{\theta+5\pi}{3}$

ⓔ $\dfrac{2\theta}{3}$　ⓕ $\dfrac{2\theta+\pi}{3}$　ⓖ $\dfrac{2\theta+4\pi}{3}$　ⓗ $\dfrac{2\theta+5\pi}{3}$

ⓘ $2\pi-\dfrac{\theta}{3}$　ⓙ $\dfrac{5\pi-\theta}{3}$　ⓚ $\pi-\dfrac{\theta}{3}$　ⓛ $\dfrac{2\pi-\theta}{3}$

問題Ⅰのウの解答群

ⓐ $\dfrac{3}{4}\cos\dfrac{2\theta}{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{4}\sin\dfrac{2\theta}{3}$　ⓑ $\dfrac{3}{4}\cos\dfrac{2\theta}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{4}\sin\dfrac{2\theta}{3}$

ⓒ $-\dfrac{3}{4}\cos\dfrac{2\theta}{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{4}\sin\dfrac{2\theta}{3}$　ⓓ $-\dfrac{3}{4}\cos\dfrac{2\theta}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{4}\sin\dfrac{2\theta}{3}$

ⓔ $\dfrac{\sqrt{3}}{4}\cos\dfrac{2\theta}{3}+\dfrac{3}{4}\sin\dfrac{2\theta}{3}$　ⓕ $\dfrac{\sqrt{3}}{4}\cos\dfrac{2\theta}{3}-\dfrac{3}{4}\sin\dfrac{2\theta}{3}$

ⓖ $-\dfrac{\sqrt{3}}{4}\cos\dfrac{2\theta}{3}+\dfrac{3}{4}\sin\dfrac{2\theta}{3}$　ⓗ $-\dfrac{\sqrt{3}}{4}\cos\dfrac{2\theta}{3}-\dfrac{3}{4}\sin\dfrac{2\theta}{3}$

問題Ⅰのエ，カの解答群

ⓐ $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$　ⓑ $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　ⓒ $\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$　ⓓ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　ⓔ 1

ⓕ $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$　ⓖ $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$　ⓗ $\sqrt{3}$　ⓘ $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$　ⓙ $\dfrac{3+\sqrt{3}}{4}$

問題Ⅰのオの解答群

ⓐ $\dfrac{3\pi}{4}$　ⓑ $\dfrac{9\pi}{10}$　ⓒ π　ⓓ $\dfrac{9\pi}{8}$　ⓔ $\dfrac{6\pi}{5}$　ⓕ $\dfrac{5\pi}{4}$

（設問は次のページにつづく）

II　次の問題文の空欄にもっとも適する答えを解答群から選び，その記号をマーク解答用紙にマークせよ。ただし，同じ記号を2度以上用いてもよい。(20 点)

a を正の定数として，

$$F(x) = \int_0^x e^{-at} \sin t \, dt$$

とおく。$x > 0$ のとき $F(x)$ の増減を調べると，$F(x)$ が極大となるのは n を自然数として $x = (2n-1)\pi$ のとき，極小となるのは $x = 2n\pi$ のときである。また，部分積分を行うと

$$F(\pi) = \int_0^\pi \boxed{\quad キ \quad} dt$$

となり，部分積分をもう一度行うことにより

$$\int_0^\pi \boxed{\quad キ \quad} dt = \Big[\boxed{\quad ク \quad} \Big]_0^\pi - \int_0^\pi \boxed{\quad ケ \quad} e^{-at} \sin t \, dt$$

がわかる。したがって，$F(\pi) = \boxed{\quad コ \quad}$ である。

以下では，$S_0 = F(0) = 0$ とおき，自然数 n に対し，$S_n = F(n\pi)$ とおく。このとき

$$S_{n+1} - S_n = \boxed{\quad サ \quad} (S_n - S_{n-1})$$

であるから，$S_{n+1} - S_n = \left(\boxed{\quad サ \quad} \right)^n (S_1 - S_0)$ であり，

$$S_n = \boxed{\quad シ \quad}, \qquad \lim_{n\to\infty} S_n = \boxed{\quad ス \quad}$$

となる。したがって，最初に考察した $F(x)$ の増減により，$\lim_{x\to\infty} F(x) = \boxed{\quad ス \quad}$ がわかる。

問題 II のキ，クの解答群

ⓐ $-a^2e^{-at}\cos t$　ⓑ $a^2e^{-at}\cos t$　ⓒ $-a^2e^{-at}\sin t$　ⓓ $a^2e^{-at}\sin t$

ⓔ $-ae^{-at}\cos t$　ⓕ $ae^{-at}\cos t$　ⓖ $-ae^{-at}\sin t$　ⓗ $ae^{-at}\sin t$

ⓘ $-\dfrac{e^{-at}\cos t}{a}$　ⓙ $\dfrac{e^{-at}\cos t}{a}$　ⓚ $-\dfrac{e^{-at}\sin t}{a}$　ⓛ $\dfrac{e^{-at}\sin t}{a}$

ⓜ $-\dfrac{e^{-at}\cos t}{a^2}$　ⓝ $\dfrac{e^{-at}\cos t}{a^2}$　ⓞ $-\dfrac{e^{-at}\sin t}{a^2}$　ⓟ $\dfrac{e^{-at}\sin t}{a^2}$

問題 II のケの解答群

ⓐ $-a^2$　ⓑ $-a$　ⓒ $-\dfrac{1}{a^2}$　ⓓ $-\dfrac{1}{a}$

ⓔ a^2　ⓕ a　ⓖ $\dfrac{1}{a^2}$　ⓗ $\dfrac{1}{a}$

問題 II のコ，サの解答群

ⓐ $e^{-a\pi}$　ⓑ $-e^{-a\pi}$　ⓒ $\dfrac{e^{-a\pi}}{2}$　ⓓ $-\dfrac{e^{-a\pi}}{2}$

ⓔ $\dfrac{1+e^{-a\pi}}{2}$　ⓕ $\dfrac{1-e^{-a\pi}}{2}$　ⓖ $\dfrac{1-e^{-a\pi}}{a^2+1}$　ⓗ $\dfrac{1+e^{-a\pi}}{a^2+1}$

ⓘ $\dfrac{a^2+e^{-a\pi}}{a^2+1}$　ⓙ $\dfrac{a^2-e^{-a\pi}}{a^2+1}$

問題 II のシの解答群

ⓐ $\dfrac{1-e^{-a(n+1)\pi}}{2}$　ⓑ $\dfrac{1-e^{-an\pi}}{2}$　ⓒ $\dfrac{1-(-e^{-a\pi})^{n+1}}{2}$

ⓓ $\dfrac{1-e^{-a(n+1)\pi}}{a^2+1}$　ⓔ $\dfrac{1-e^{-an\pi}}{a^2+1}$　ⓕ $\dfrac{1-(-e^{-a\pi})^{n+1}}{a^2+1}$

ⓖ $\dfrac{1-(-e^{-a\pi})^{n}}{a^2+1}$　ⓗ $\dfrac{2^n-(-e^{-a\pi})^{n}}{2^n(a^2+1)}$　ⓘ $\dfrac{2^n-e^{-an\pi}}{2^n(a^2+1)}$

ⓙ $\dfrac{a^2-(-e^{-a\pi})^{n}}{a^2+1}$　ⓚ $\dfrac{a^2-e^{-an\pi}}{a^2+1}$

問題 II のスの解答群

ⓐ 0　ⓑ $\dfrac{1}{2}$　ⓒ $\dfrac{a^2}{2}$　ⓓ $\dfrac{1}{a^2+1}$　ⓔ $\dfrac{a^2}{a^2+1}$　ⓕ 1　ⓖ ∞

（設問は次のページにつづく）

III　座標平面上に，3点 A$(1,0)$，B$(2,1)$，C$(-1,3)$ をとる。以下の問いに答えよ。(30点)

原点Oを通る傾き k の直線 $y=kx$ を ℓ とする。点A，B，Cのそれぞれと直線 ℓ との距離を a，b，c とし，

$$F=a^2+b^2+c^2$$

とおく。

(1) F を k で表せ。

(2) F を最小にする k の値を m とし，最大にする k の値を M とする。m と M を求めよ。

以下では，点Pの座標が (u,v) のとき，点 $(u^2-v^2,\,2uv)$ を P′ と表すことにする。点Pとして点A，B，Cをとったときの P′ をそれぞれ A′，B′，C′ とし，△A′B′C′ の重心をHとする。

(3) m，M を (2) のとおりとする。点Pが直線 $y=mx$ または直線 $y=Mx$ 上にあるとき，点 P′ は直線OH上にあることを示せ。

IV　a を正の実数とする。2つの曲線

$$C_1 : y = ax^3 \quad (x \geqq 0), \qquad C_2 : y = x\log x \quad (x \geqq 1)$$

がある点Pを共有し，Pにおけるそれぞれの接線が一致している。このとき，以下の問いに答えよ。(30 点)

(1)　点Pの座標と a を求めよ。

(2)　曲線 C_1 と C_2 はP以外に共有点をもたないことを示せ。

(3)　曲線 C_1，C_2，および x 軸で囲まれた図形の面積 S を求めよ。